انتشارات لوح برتر

فست بوک حسابان (۱)

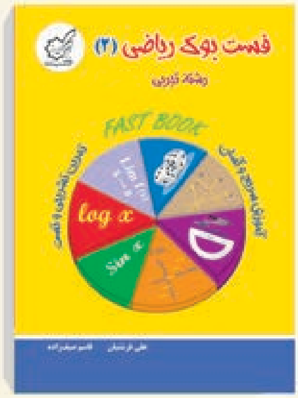
پایهٔ یازدهم

آموزش سریع، آسان

تمرین تشریحی و تست

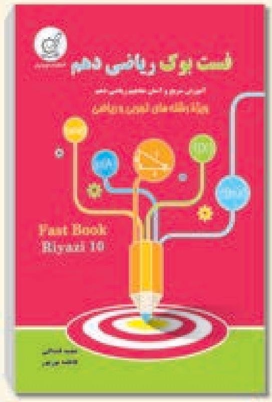
صدیقه ابراهیمی	مریم محمدزاده

لوح برتر انتخاب برتر



فست بوک ریاضی (۲)

(رشتهٔ تجربی)



فست بوک ریاضی دهم

(رشتهٔ ریاضی و تجربی)

@Lohebartarpub

تهران، انقلاب، خیابان فخررازی نبش
کوچه ماستری فراهانی، پلاک ۲۸

۶۶۱۷۵۰۵۳ - ۶۶۹۷۱۹۷۰ - ۶۶۹۷۱۸۰۴

www.Lohebartar.ir

Lohebartar@gmail.com

QRcode

9786007412459

فست بوک حسابان (۱)

پایهٔ یازدهم

آموزش سریع و آسان

تمرین تشریحی و تست

مؤلفان

صدیقه ابراهیمی ، مریم محمدزاده مدیری

انتشارات لوح برتر

فهرست

به نام او که هرچه داریم از اوست

مقدمهٔ ناشر

با استقبال بی‌نظیر دانش‌آموزان عزیز از فست‌بوک‌های ریاضی هفتم، هشتم، نهم و دهم و درخواست بسیاری از دبیران فرهیخته متوسطهٔ دوم، با عنایت پروردگار و همت گروه مؤلفان توانستیم مجموعهٔ حاضر را با نـام «**فست‌بوک حسابان (۱)**» پایهٔ یازدهم با رویکرد آموزشی، یک صفحه آموزش و تمـرین، یـک صـفحه مثـال و پاسخ، طراحی و تدوین کنیم.

برای آشنایی بیش‌تر شما عزیزان با این مجموعه، برخی از ویژگی‌های اصلی آن را با هم مرور می‌کنیم:

۱- کتاب حاضر کلیهٔ مباحث کتاب درسی پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی را مطابق کتاب جدیدالتألیف دربرمی‌گیرد. مؤلفان این مجموعه تمام تلاش خود را به‌کار برده‌اند تا همهٔ نکات کلیدی درس‌ها و تمرین‌هـای کتـاب درسـی را آموزش دهند.

۲- سـعی کـرده‌ایـم بـا زبـانی سـاده و روان، تمـام مفـاهیم درسـی را آمـوزش دهـیم. بـه‌طـورکلی سـاختار ایـن کتاب به‌گونه‌ای است که صفحات زوج به آموزش و تمرین و صفحات فرد به حل مثال اختصاص داده شده است.

۳ـ هر فصل به چند درس تقسیم شده است و در ابتدا، بخش آموزش و سپس سؤالات تشریحی آن درس با پاسخ کاملاً تشریحی و آموزشی ارائه شده است.

۴ـ در پایان هر فصل تعدادی تست کنکور و تألیفی با پاسـخ‌هـای کـاملاً تـشریحی و آموزشـی مطـابق بـا کتـاب درسی ارائه شده است.

۵- آزمون‌های تشریحی ۲۰ نمره‌ای ویژهٔ نیم‌سال اول در پایان فـصل سـوم و آزمـون پایـان سـال در انتهـای کتـاب تکمیل کنندهٔ این مجموعه است.

۶- برای دانش‌آموزان مستعدتر، در پایان برخی از فصل‌ها، مطالبی فراتر از سطح کتاب درسی با نـام «بـیش‌تـر بـدانیم» ارائه شده است.

۷- برای حل تست‌های بیش‌تر به کتاب «تست فست‌بوک حسابان (۱)» مراجعه کنید.

حجم مناسب و جامع بـودن ایـن کتـاب بـرای دانـش‌آمـوزان بـسیار هیجـان‌انگیـز اسـت. سـاختار آمـوزش سـریع ایـن مجموعه به‌گونه‌ای طراحی شده است که کار دبیر را در انتقال مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان، ساده و آسان‌تر می‌کند.

در ضمن توجه داشته باشید که نام «فست‌بوک» به‌خاطر ساختار آموزشی سریع کتاب است نه حجم و تعداد صفحات آن.

امید است این مجموعه مورد استقبال دبیران فرهیخته، دانش‌آموزان عزیز و اولیای گرامی قرار گیرد.

شما عزیزان می‌توانید نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق پل‌های ارتباطی زیر با ما در میان بگذارید.

صادق گرجی
مدیر انتشارات لوح برتر

پل‌های ارتباطی شما با ما

۶۶۱۷۵۰۵۳ ۶۶۹۷۱۹۷۰ ۶۶۹۷۱۸۰۴ ۶۶۹۷۲۴۷۸

شماره تلگرام: ۰۹۳۶۰۴۷۵۱۲۵ کانال انتشارات **@Lohebartarpub**

پست الکترونیکی: **Lohebartar@gmail.com** سایت: **Lohebartar.ir**

سامانه پیامکی: ۳۰۰۰۵۳۶۴۰۰۰۵۳۶

فصل اول

جبر و معادله

فهرست داخلی فصل اول (جبر و معادله)

آموزش و تمرین

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در کتاب ریاضی دهم با مفهوم دنباله و انواع آن آشنا شدید. می‌دانید دنبالهٔ اعداد طبیعی به‌صورت $۱,۲,...,n$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=۱$ است.

برای به‌دست آوردن مجموع n جملهٔ اول این دنباله می‌توان به‌صورت زیر عمل نمود:

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + ... + n$$

جملات را از انتها به ابتدا نیز جمع می‌کنیم:

$$S = n + (n-۱) + (n-۲) + ... + ۱$$

حال جملاتِ دو عبارت بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$۲S = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + ... + (n+۱)}_{n \text{ تا}}$$

$$\Rightarrow ۲S = n(n+۱)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

فرمول محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول اعداد طبیعی	$\mathbf{S = \frac{n(n+۱)}{۲}}$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰ را حساب کنید.

☑ **پاسخ:**

$$S = \frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲} = ۵۵$$

حال به شیوهٔ بالا می‌خواهیم مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $a_۱, a_۱+d, a_۱+۲d, ..., a_۱+(n-۱)d$ را محاسبه کنیم که در آن $a_۱$ جملهٔ اول و d قدرنسبت است:

$$S = a_۱ + [a_۱+d] + ... + [a_۱+(n-۲)d] + [a_۱+(n-۱)d]$$

$$S = [a_۱+(n-۱)d] + [a_۱+(n-۲)d] + ... + [a_۱+d] + a_۱$$

$$۲S = \underbrace{[۲a_۱+(n-۱)d] + [۲a_۱+(n-۱)d] + ... + [۲a_۱+(n-۱)d] + [۲a_۱+(n-۱)d]}_{n \text{ بار}}$$

$$۲S = n[۲a_۱+(n-۱)d] \Rightarrow S = \frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$$

فرمول محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برحسب جملهٔاول و قدرنسبت	$\mathbf{S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]}$

همچنین با توجه به این‌که جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a_n = a_۱+(n-۱)d$ است پس می‌توان نوشت:

$$S_n = \frac{n}{۲}\left[a_۱ + \underbrace{a_۱+(n-۱)d}_{a_n}\right] \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

فرمول محاسبهٔ مجموع n جملهٔاول دنبالهٔ حسابی برحسب جملهٔ اول و جملهٔ آخر	$\mathbf{S_n = \frac{n}{۲}(a_۱+a_n)}$

مثال و پاسخ

مثال (۱): مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $۳,۷,۱۱,...$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** جملهٔ اول این دنباله $a_1 = ۳$ و قدرنسبت آن $d = a_2 - a_1 = ۷ - ۳ = ۴$ و $n = ۱۰$ لذا:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}\left[۲(۳) + (۱۰ - ۱) \times ۴\right] = ۲۱۰$$

مثال (۲): در دنبالهٔ حسابی $۳,۹,۱۵,...$ حداقل چند جملهٔ آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش‌تر شود؟ (نهایی دی)

☑ **پاسخ:** جملهٔ اول $a_1 = ۳$ و قدرنسبت $d = ۹ - ۳ = ۶$ می‌باشد. می‌خواهیم n را چنان بیابیم که $S_n > ۳۰۰$ شود:

$$S_n = \frac{n}{۲}\left[۲ \times ۳ + (n - ۱) \times ۶\right] > ۳۰۰$$

$$= \frac{n}{\cancel{۲}}\left[\overset{۳}{\cancel{۶}}\, n\right] > ۳۰۰ \Rightarrow ۳n^۲ > ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ > ۱۰۰ \Rightarrow n > ۱۰ \Rightarrow n \geq ۱۱$$

لذا حداقل باید ۱۱ جمله را جمع کنیم تا مجموع از ۳۰۰ بیش‌تر شود.

مثال (۳): مجموع جمله‌های هفتم و بیست و چهارم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۰۰ است. مجموع ۳۰ جملهٔ اول این دنباله را بیابید.

☑ **پاسخ:**

$$a_۷ + a_{۲۴} = a_1 + ۶d + a_1 + ۲۳d = ۱۰۰ \Rightarrow \underbrace{۲a_1 + ۲۹d} = ۱۰۰$$

$$S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}\left[۲a_1 + (۳۰ - ۱)d\right] = ۱۵(۲a_1 + ۲۹d) = ۱۵ \times ۱۰۰ = ۱۵۰۰$$

مثال (۴): در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ nام به‌صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله را بیابید. (سراسری)

☑ **پاسخ:** برای محاسبه جملهٔ اول و جملهٔ پانزدهم در جملهٔ عمومی به‌جای n عدد ۱ و ۱۵ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$a_1 = \frac{۳}{۲}(۱) - ۵ = \frac{۳}{۲} - ۵$$

$$a_{۱۵} = \frac{۳}{۲}(۱۵) - ۵ = \frac{۴۵}{۲} - ۵$$

$$s_n = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}\left[\frac{۳}{۲} - ۵ + \frac{۴۵}{۲} - ۵\right] = \frac{۱۵}{۲}(۲۴ - ۱۰) = ۱۰۵$$

سؤالات تشریحی درس اول

۱ـ در یک دنبالهٔ حسابی مجموع ۴ جملهٔ اول ۱۵ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی ۳۰ است. جملهٔ یازدهم دنباله را بیابید.

(سراسری خارج)

۲ـ در دنبالهٔ حسابی ...,۲,۶,۱۰ حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیش‌تر شود؟ **(نهایی)**

۳ـ در دو دنبالهٔ حسابی ...,۲,۷,۱۲ و ...,۸,۱۱,۱۴ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ **(سراسری خارج)**

۴ـ در یک دنبالهٔ حسابی که ۲۰ جمله دارد، مجموع جملات با شمارهٔ زوج ۸۰ و مجموع همهٔ جملات ۱۵۵ است. جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟ **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

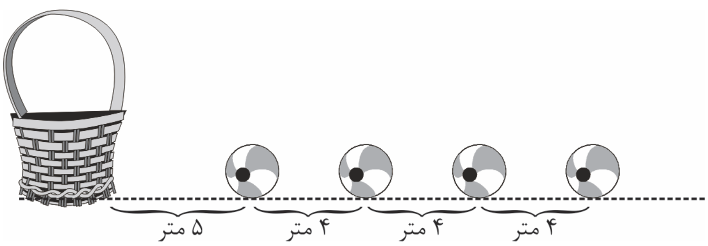
۵ـ مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ را بیابید. **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

۶ـ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول، $\frac{۱}{۳}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ **(سراسری خارج)**

۷ـ محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن است. قرار است تولید این لوله‌ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد، مجموع تولید لوله‌ها را در دههٔ ۹۰ حساب کنید.

۸ـ در زندگی واقعی خود مسئله‌ای طرح کنید که بیانگر دنبالهٔ حسابی باشد.

۹ـ تعداد ۱۰ توپ روی یک خط مستقیم و به فاصلهٔ ۴ متر از هم قرار دارند. دونده‌ای می‌خواهد از کنار یک سبد که تا اولین توپ ۵ متر فاصله دارد. شروع به حرکت کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل و به داخل آن بیندازد. این دونده مجموعاً چند متر دویده است؟



پاسخ سؤالات تشریحی درس اول

۱ـ

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 15 \\ a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -5 \\ 4 \end{matrix} \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}, a_1 = 3 \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow a_{11} = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 8$$

۲ـ

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1))d \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1)4) > 200$$

$$\Rightarrow 4n^2 > 400 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10$$

حداقل ۱۱ جمله را باید جمع کرد.

۳ـ

$2, 7, 12, \ldots \qquad d_1 = 5$

$8, 11, 14, \ldots \qquad d_2 = 3$

در دنبالهٔ جملات مشترک قدرنسبت برابر ک.م.م دو قدرنسبت d_1 و d_2 است. $\quad d = 15$

دنبالهٔ جملات مشترک را می‌نویسیم: $\quad 17, 32, \ldots$

جملهٔ عمومی این دنباله $\quad a_n = a + (n-1)d \Rightarrow 17 + (n-1)15 = 15n + 2$

برای یافتن تعداد اعداد سه رقمی باید تعداد اعدادی که بین ۱۰۰ و ۹۹۹ هستند را بیابیم.

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

پس تعداد کل $66 - 7 + 1 = 60$

۴ـ

مجموع جملات ردیف زوج

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \ldots + a_{20} = 80 \xrightarrow[\text{قدرنسبت } 2d]{\text{۱۰ جمله}} S = \frac{10}{2}\left[2a_2 + 9(2d)\right] = 80 \\ S_{20} = \frac{20}{2}\left[2a + (20-1)d\right] = 155 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\overset{a+d}{a_2} + 18d = 16 \\ 20a + 190d = 155 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 20d = 16 \\ 20a + 190d = 155 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 10d = 8 \\ 2a + 19d = 15/5 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \ , \ d = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_5 = a + 4d = 3 + 4(\frac{1}{2}) = 5$$

۵ـ

در واقع باید مجموع جملات دنبالهٔ حسابی متناهی زیر را بیابیم:

$$۳,۹,۱۵,...,۹۹$$

$$a_n = a + (n-۱)d \Rightarrow ۹۹ = ۳ + (n-۱)۶ \Rightarrow n = ۱۷$$

$$S_n = \frac{n}{۲}[a_۱ + a_n] \Rightarrow S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹) = ۸۶۷$$

۶ـ

$$S_۵ = \frac{۱}{۳}(S_{۱۰} - S_۵) \Rightarrow ۳S_۵ = S_{۱۰} - S_۵ \Rightarrow S_{۱۰} = ۴S_۵ \qquad (*)$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow \begin{cases} S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a_۱ + ۹d) \\ S_۵ = \frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴d) \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} ۵(۲a_۱ + ۹d) = ۱۰(۲a_۱ + ۴d) \Rightarrow d = ۲a_۱$$

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۱ + d}{a_۱} = \frac{a_۱ + ۲a_۱}{a_۱} = \frac{۳a_۱}{a_۱} = ۳$$

۷ـ

تولید در سال اول یعنی آغاز سال ۹۰ تا آغاز سال ۹۱ برابر ۱۹ میلیون تن است.

$$a_۱ = ۱۹ \quad , \quad d = ۴ \quad , \quad n = ۱۰$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) = \frac{۱۰}{۲}(۲\times۱۹ + ۹\times۴) = ۳۷۰ \text{ میلیون تن}$$

۸ـ

خانواده آقای احمدی برای خرید یک تلویزیون بدون پیش پرداخت در ماه اول ۵۰۰/۰۰۰ و ماه دوم ۷۰۰/۰۰۰ تومان و بدین ترتیب هر ماه ۲۰۰/۰۰۰ تومان بیش‌تر از ماه قبل چک داده‌اند. چقدر طول می‌کشد تا بهای تلویزیون را که ۶ میلیون تومان است، پرداخت کنند.

$$a = ۵۰۰/۰۰۰ \qquad d = ۲۰۰/۰۰۰$$

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d]$$

$$۶/۰۰۰/۰۰۰ = \frac{n}{۲}[۲(۵۰۰/۰۰۰) + (n-۱)(۲۰۰/۰۰۰)]$$

$$۱۲/۰۰۰/۰۰۰ = n\left[۱/۰۰۰/۰۰۰ + ۲۰۰/۰۰۰n - ۲۰۰/۰۰۰\right] = ۸۰۰/۰۰۰n + ۲۰۰/۰۰۰n^۲$$

$$\xrightarrow[۲۰۰/۰۰۰]{\text{تقسیم بر}} ۶۰ = ۴n + n^۲ \Rightarrow n^۲ + ۴n - ۶۰ = ۰$$

$$\Delta = ۱۶ - ۴(۱)(-۶۰) = ۲۵۶$$

$$n - \frac{-۴ \pm ۱۶}{۲} \Rightarrow \begin{cases} n = -۱۰ & \text{غیرقابل قبول} \\ n = ۶ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۹ـ

دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد مسافت $۱۰ = ۲ \times ۵$ متر را طی می‌کند و برای توپ دوم $۱۸ = (۴ + ۵)۲$ متر و برای توپ سوم $۲۶ = (۴ + ۴ + ۵)۲$ بنابراین مسافت‌های طی شده تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند:

$$۱۰, ۱۸, ۲۶, \ldots \qquad n = ۱۰ \ , \ a_۱ = ۱۰ \ , \ d = ۸$$

$$S = \frac{۱۰}{۲}\left[۲ \times ۱۰ + (۱۰ - ۱)۸\right] = ۵(۲۰ + ۷۲) = ۵ \times ۹۲ = ۴۶۰ \text{ متر}$$

آموزش و تمرین

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در سال گذشته با دنبالهٔ هندسی آشنا شدید. دنبالهٔ $a, aq, aq^{۲}, \dots, aq^{n-۱}, \dots$ $(q \neq ۱)$ دنبالهٔ هندسی است. a جملهٔ اول و q قدرنسبت نامیده می‌شود و از تقسیم هر جمله بر جملهٔ ماقبل به‌دست می‌آید. می‌خواهیم مجموع n جملهٔ‌اول این دنباله را محاسبه کنیم:

$$S = a + aq + aq^{۲} + \dots + aq^{n-۱}$$

حال Sq را تشکیل می‌دهیم و با محاسبهٔ $S - Sq$ به هدف خود که پیدا کردن فرمولی برای S می‌باشد، خواهیم رسید.

$$Sq = aq + aq^{۲} + aq^{۳} + \dots + aq^{n}$$

$$\Rightarrow S - Sq = a + \cancel{aq} + \dots + \cancel{aq^{n-۱}} - \cancel{aq} - aq^{۲} - \dots - \cancel{aq^{n-۱}} - aq^{n}$$

$$\Rightarrow S - Sq = a - aq^{n}$$

$$\Rightarrow S(۱-q) = a(۱-q^{n})$$

$$\Rightarrow S = \frac{a(۱-q^{n})}{۱-q}$$

فرمول محاسبهٔ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی	$\mathbf{S_n = \frac{a(۱-q^{n})}{۱-q} \quad (q \neq ۱)}$

نکته: اگر $|q| < ۱$ حاصل $a + aq + \dots + aq^{n-۱} + \dots$ به $S = \frac{a}{۱-q}$ نزدیک می‌شود که در آن a جملهٔ اول و q قدرنسبت است. به $\frac{a}{۱-q}$ حد مجموع گفته می‌شود.

تمرین (۱): حاصل $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \dots$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** $S = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲ \qquad (q = \frac{۱}{۲} < ۱)$

توجه کنید که در این حالت باید قدرمطلق قدرنسبت عددی کوچک‌تر از یک واحد باشد.

تمرین (۲): مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۲, ۸, ۳۲, \dots$ را بیابید.

☑ **پاسخ:** $a = ۲ \qquad q = \frac{۸}{۲} = ۴ \qquad n = ۱۰$

$$S_{۱۰} = \frac{۲(۱-۴^{۱۰})}{۱-۴} = \frac{-۲}{۳}(۱-۴^{۱۰})$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): در دنبالهٔ هندسی ...,۱,۲,۴ مجموع ۱۴ جملهٔ اول، چند برابر مجموع ۷ جملهٔ اول آن است؟
(سراسری خارج)

پاسخ:

$a=۱\ ,\ q=۲$

نسبت این دو جمله را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} S_{۱۴}=\dfrac{۱(۱-۲^{۱۴})}{۱-۲}=۲^{۱۴}-۱ \\ S_{۷}=\dfrac{۱(۱-۲^{۷})}{۱-۲}=۲^{۷}-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{S_{۱۴}}{S_{۷}}=\frac{۲^{۱۴}-۱}{۲^{۷}-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{۱۴}}{S_{۷}}=\frac{(۲^{۷}-۱)(۲^{۷}+۱)}{۲^{۷}-۱}=۲^{۷}+۱=۱۲۹$$

پس ۱۲۹ برابر است.

مثال (۲): کارمندی سالانه ۱۴ میلیون تومان حقوق دریافت می‌کند. اگر هر سال ٪۱۰ به حقوق او افزوده شود، مجموع حقوق دریافتی او پس از گذشت ۳۰ سال چه‌قدر است؟

پاسخ:

$a=۱۴$ میلیون

$$q=\frac{a_{۲}}{a_{۱}}=\frac{۱۴/۰۰۰/۰۰۰+٪۱۰\times ۱۴/۰۰۰/۰۰۰}{۱۴/۰۰۰/۰۰۰}=\frac{۱۵/۴۰۰/۰۰۰}{۱۴/۰۰۰/۰۰۰}=۱/۱\Rightarrow q=۱/۱$$

$$S_{۳۰}=\frac{۱۴/۰۰۰/۰۰۰(۱-(۱/۱)^{۳۰})}{\underbrace{۱-۱/۱}_{-۰/۱}}=۱۴۰/۰۰۰/۰۰۰\left((۱/۱)^{۳۰}-۱\right)$$

مثال (۳): در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ اول ۳ و جملهٔ چهارم ۲۴ است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$a_{۱}=a=۳\qquad ,\qquad a_{۴}=aq^{۳}=۲۴$$

$$\frac{a_{۴}}{a_{۱}}=\frac{aq^{۳}}{a}=q^{۳}=\frac{۲۴}{۳}=۸\Rightarrow q=۲$$

$$S_{۱۰}=\frac{۳(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}=-۳(۱-۲^{۱۰})=-۳\times -۱۰۲۳=۳۰۶۹$$

مثال و پاسخ

مثال (۴): جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی $a_n = ۲^{n+۱}$ می‌باشد. مجموع چند جمله از این دنبالهٔ هندسی ۱۲۴ است؟

پاسخ: جملات دنباله $۴,۸,۱۶,...$ است. لذا $a_۱ = ۴$ و $q = ۲$.

$$S_n = \frac{۴(۱-۲^n)}{۱-۲} = ۴(۲^n - ۱) \Rightarrow ۴(۲^n - ۱) = ۱۲۴ \Rightarrow ۲^n - ۱ = ۳۱ \Rightarrow ۲^n = ۳۲ \Rightarrow n = ۵$$

مثال (۵): حاصل $\dfrac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...}{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+...}$ را بیابید.

پاسخ: صورت کسر مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با $a = ۱$ و $q = \frac{۱}{۲}$ است و در مخرج کسر نیز $a = ۱$ و $q = \frac{۱}{۳}$ می‌باشد. لذا حد مجموعِ صورت و مخرج کسر را حساب می‌کنیم.

$$A = \frac{\dfrac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}}{\dfrac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}} = \frac{۲}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}$$

مثال (۶): در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد چقدر است؟ (سراسری)

پاسخ: سه جمله را به‌صورت a، aq و $\frac{a}{q}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a \times aq \times \dfrac{a}{q} = ۲۱۶ \Rightarrow a^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow a = ۶ \\ \dfrac{a}{q} + a + aq = ۱۹ \Rightarrow \dfrac{۶}{q} + ۶ + ۶q = ۱۹ \Rightarrow \dfrac{۶}{q} + ۶q - ۱۳ = ۰ \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } q} ۶q^۲ - ۱۳q + ۶ = ۰ \end{cases}$$

$$\Delta = ۲۵ \qquad q = \frac{۱۳ \pm ۵}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{۱۸}{۱۲} = \dfrac{۳}{۱۲} \\ q = \dfrac{۸}{۱۲} = \dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

لذا این جملات به یکی از صورت‌های زیر است:

$$q = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴,۶,۹$$

$$q = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۹,۶,۴$$

پس تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین برابر ۵ است.

سؤالات تشریحی درس دوم

۱ـ مجموع چند جمله از دنبالهٔ $۶,-۱۲,۲۴,...$ (با شروع از جملهٔ اول) ۱۲۶- است؟ **(نهایی خرداد)**

۲ـ در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جملـهٔ اول چنـد برابـر جملهٔ پنجم است؟ **(سراسری)**

۳ـ حاصل $(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴)(۱-x+x^۲-x^۳+x^۴)$ به ازای $x=\sqrt{۳}$ بیابید.

۴ـ مجموع جملات $۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+...$ را بیابید.

۵ـ حاصل عبارت $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^{۹}+...+t+۱}{t^{۹}+t^{۶}+t^{۳}+۱}$ را به‌ازای $t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ بیابید. **(سراسری ریاضی)**

۶ـ در زندگی واقعی خود مثالی از یک دنبالهٔ هندسی طراحی کنید.

۷ـ بر محیط دایره‌ای ۱۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمـایز را بیابید.

۸ـ تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگـر مجمـوع تمـام جملـه‌هـای دنبالـه، ۳ برابـر مجمـوع جمله‌های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن‌را بیابید.

پاسخ سؤالات تشریحی درس دوم

۱ـ

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)}=-126\Rightarrow 1-(-2)^n=-63$$
$$(-2)^n=64\Rightarrow (-2)^n=(-2)^6\Rightarrow n=6$$

۲ـ

$$\begin{cases}S_3=136\\ S_6=153\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1\times\dfrac{1-q^3}{1-q}=136\\ a_1\times\dfrac{1-q^6}{1-q}=153\end{cases}\Rightarrow\frac{S_3}{S_6}=\frac{136}{153}=\frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow\frac{1-q^3}{1-q^6}=\frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)}=\frac{8}{9}\Rightarrow 1+q^3=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$
$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}q^4}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^4}=16$$

۳ـ

$$(1-x+x^2-x^3+x^4)=\frac{1(1-(-x)^5)}{1-(-x)}=\frac{1+x^5}{1+x}\qquad (q=-x,a=1)$$
$$1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1(1-x^5)}{1-x}\qquad (a=1,q=x)$$
$$\Rightarrow (1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)=\frac{1+x^5}{1+x}\times\frac{1-x^5}{1-x}$$
$$=\frac{1-x^{10}}{1-x^2}=\frac{1-(\sqrt{3})^{10}}{1-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}^{10}-1)$$

۴ـ

$$(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

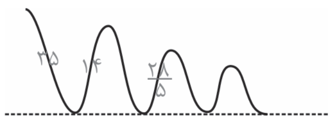
۵ـ

$$\frac{\overbrace{t^{11}+t^{10}+t^{9}+\dots+t+1}^{a=1,\ q=t}}{\underbrace{t^{9}+t^{6}+t^{3}+1}_{a=1,\ q=t^3}}=\frac{\frac{1\cancel{(1-t^{12})}}{1-t}}{\frac{1\cancel{(1-(t^{3})^{4})}}{1-t^{3}}}=\frac{1-t^{3}}{1-t}=\frac{(1+t+t^{2})(1-t)}{1-t}=1+\underbrace{t+t^{2}}=1+1=2$$

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 2t+1=\sqrt{5}\Rightarrow(2t+1)^{2}=5\Rightarrow 4t^{2}+4t+1=5\Rightarrow \overbrace{t^{2}+t}=1$$

۶ـ

یک توپ بسکتبال از ارتفاع ۳۵ متری رها می‌شود و هر بار که به زمین می‌خورد $\frac{2}{5}$ ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. در مجموع این توپ تا هنگام توقف چند متر جابه‌جا شده است؟

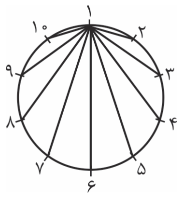


دنبالهٔ ارتفاع $35, 14, \frac{28}{5}, \dots$

دنبالهٔ مسافت $35, 28, \frac{56}{5}, \dots$

$$S=35+\frac{28}{1-\frac{2}{5}}=35+\frac{28}{\frac{3}{5}}=35+\frac{140}{3}=\frac{245}{3}$$

۷ـ



نقطهٔ اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، مطابق شکل زیر ملاحظه می‌کنید که ۹ وتر پدید می‌آید. به همین ترتیب با وصل کردن نقطهٔ دوم به سایر نقطه‌ها ۸ وتر پدید می‌آید و ...

تعداد کل وترها $=9+8+\dots+1=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{9}{2}(9+1)=\frac{9}{2}\times 10=45$

۸ـ

جملات دنباله که تعداد آن‌ها زوج است را به‌صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ درنظر می‌گیریم و مجموع تمام جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرفی جملات با ردیف فرد به‌صورت $a_1, \overset{\overset{a_1q^2}{\uparrow}}{a_3}, \dots, a_{2n-1}$ می‌باشند که دنبالهٔ هندسی بـا قدرنسبت $(\frac{a_3}{a_1}=q^2)$ هستند. لذا مجموع آن‌ها به‌صورت $S=\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. پس داریم:

$$S_{2n}=\frac{\cancel{a_1}\cancel{(1-q^{2n})}}{\cancel{1-q}}=3\times\frac{\cancel{a_1}\cancel{(1-q^{2n})}}{\cancel{(1-q)}(1+q)}\xrightarrow[\text{مساوی از طرفین}]{\text{حذف جملات}}\frac{3}{1+q}=1\Rightarrow q=2$$

آموزش و تمرین

معادلات درجهٔ دوم

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل آن‌ها آشنا شدید. در پایهٔ نهم با حل معادلهٔ درجهٔ اول و در پایهٔ دهم با حل معادلهٔ درجهٔ دوم آشنا شدید. می‌دانید که هر معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$ تعریف می‌شود و جواب‌های آن در صورت وجود از رابطهٔ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$ به‌دست می‌آیند که $b^۲ - ۴ac$ را با نماد Δ نمایش می‌دهیم.

با شرط $\Delta > ۰$ دو جواب $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$ را خواهیم داشت.

به a، b و c ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم گفته می‌شود. می‌خواهیم روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را در معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آوریم. برای این منظور، حاصل‌جمع $x' + x''$ و حاصل‌ضرب $x'x''$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

$$x' \times x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{b^۲ - \Delta}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - b^۲ + ۴ac}{۴a^۲} = \frac{c}{a}$$

حاصل‌جمع ریشه‌ها را با S وحاصل‌ضرب ریشه‌ها را با P نمایش می‌دهیم. لذا:

$$\boxed{\mathbf{S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad , \quad P = x'x'' = \frac{c}{a}}}$$

از طرف دیگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰ (a \neq ۰)$، اگر طرفین معادله بر a تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰$ و در نتیجه $x^۲ - Sx + P = ۰$ حاصل می‌شود که معادلهٔ درجهٔ دومی است که ریشه‌هایش معلوم است. به عنوان مثال اگر بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسیم که ریشه‌های ۲- و ۵ باشد ابتدا S و P را به‌دست می‌آوریم و در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$P = x'x'' = ۵ \times (-۲) \quad , \quad S = x' + x'' = ۵ + (-۲)$$

پس $S = ۳$ ، $P = -۱۰$ و معادله به‌صورت $x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰$ حاصل می‌شود.

تذکر: می‌توان حاصل $|x' - x''|$ را نیز محاسبه نمود:

$$|x' - x''| = \left|\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}\right| = \left|\frac{۲\sqrt{\Delta}}{۲a}\right| = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال و پاسخ

✍ **مثال (۱):** اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰ (a\neq ۰)$ باشند، حاصل عبارات زیر را برحسب S و P بنویسید.

الف) $x'^{۲}+x''^{۲}$ ب) $x'^{۳}+x''^{۳}$ ج) $\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}$

د) $x'x''^{۲}+x'^{۲}x''$ هـ) $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}$

☑ **پاسخ:**

الف) $x'^{۲}+x''^{۲}=(x'+x'')^{۲}-۲x'x''=S^{۲}-۲P$

ب) $x'^{۳}+x''^{۳}=(x'+x'')^{۳}-۳x'x''(x'+x'')=S^{۳}-۳PS$

ج) $\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}=\frac{x''+x'}{x'x''}=\frac{S}{P}$

د) $x'x''^{۲}+x'^{۲}x''=x'x''(x''+x')=PS$

هـ) $\sqrt{x'}+\sqrt{x''}=A\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}\underbrace{x'+x''}_{S}+۲\sqrt{\underbrace{x'x''}_{P}}=A^{۲}$

$\Rightarrow S+۲\sqrt{P}=A^{۲}\Rightarrow A=\pm\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$

چون A حاصل‌جمع دو رادیکال با فرجهٔ زوج است، پس نامنفی است و پاسخ منفی غیرقابل قبول است.

✍ **مثال (۲):** معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۲-\sqrt{۳}$ و $۲+\sqrt{۳}$ باشد.

☑ **پاسخ:**

$S=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۴$

$P=(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۴-۳=۱$

مقادیر به‌دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم:

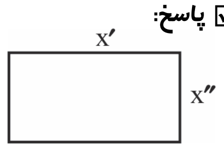
$\Rightarrow x^{۲}-Sx+P=۰$

$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۱=۰$

مثال و پاسخ

مثال (۳): محیط یک مستطیل $۲۲\,cm$ و مساحت آن $۲۸\,cm^۲$ است. ابعاد مستطیل را بیابید.

☑ **پاسخ:**



$$\text{محیط} = ۲(x' + x'') = ۲۲ \Rightarrow x' + x'' = \frac{۲۲}{۲} \Rightarrow x' + x'' = ۱۱ \quad , \quad x'x'' = ۲۸$$

معادلهٔ درجهٔ دومی که در آن $S = ۱۱$ و $P = ۲۸$ است را حل می‌کنیم.

$$x^۲ - ۱۱x + ۲۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x' = ۴ & \text{عرض} \\ x'' = ۷ & \text{طول} \end{cases}$$

مثال (۴): k را چنان بیابید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ - kx + ۳ = ۰$ مساوی $\frac{۳}{۴}$ باشد.

☑ **پاسخ:**

$$x' = \frac{۳}{۴} \quad , \quad S = x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{k}{۴} \quad , \quad P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$$

$$P = x'x'' = \frac{۳}{۴}x'' = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x'' = ۱$$

$$S = x' + x'' = \frac{k}{۴} \Rightarrow ۱ + \frac{۳}{۴} = \frac{k}{۴} \Rightarrow \frac{۷}{۴} = \frac{k}{۴} \Rightarrow k = ۷$$

مثال (۵): اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ باشد، معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشد.

☑ **پاسخ:**

$$۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = \frac{-۳}{۲} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$S' = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{-۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۳$$

$$P' = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{P} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - (-۳)x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$$

مثال و پاسخ

مثال (۶): مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

$$۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = \frac{۳}{۲} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$x'^۲ + x''^۲ = S^۲ - ۲P$$

$$= (\frac{۳}{۲})^۲ - ۲(\frac{۱}{۲}) = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴}$$

مثال (۷): اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - \sqrt{۳}x + \sqrt{۲} = ۰$ باشد حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

ابتدا حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را برحسب S و P می‌نویسیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^۲ = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = S + ۲\sqrt{P}$$

$$x^۲ - \sqrt{۳}x + \sqrt{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = \sqrt{۳} \\ P = \frac{c}{a} = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^۲ = S + ۲\sqrt{P} \Rightarrow \sqrt{۳} + ۲\sqrt{\sqrt{۲}} = \sqrt{۳} + ۲\sqrt[۴]{۲}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\sqrt{۳} + ۲\sqrt[۴]{۲}}$$

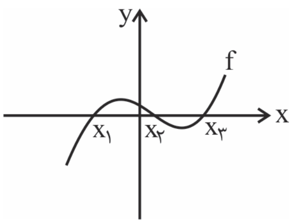
آموزش و تمرین

صفرهای تابع

برای تابع $f(x)$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم.

اگر نمودار تابع f را رسم کنیم **صفرهای تابع** f **طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور** x **هاست**.

یعنی نقاطی از دامنهٔ تابع f که به‌ازای آن‌ها مقدار $f(x)$ برابر صفر می‌شود.



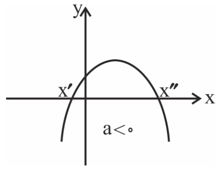
به‌عنوان مثال در نمودار زیر جواب‌های معادلـهٔ $f(x)=0$ برابـر x_1، x_2 و x_3 هستند که صفرهای تابع f نامیده می‌شوند. در این حالت می‌توان نوشت:

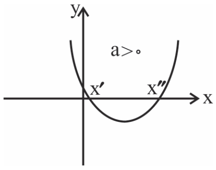
$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

که یک معادلهٔ درجهٔ سوم است.

با سهمی و رسم آن در کتاب دهم آشنا شده‌اید. می‌دانید نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به یکی از صورت‌های زیر است:

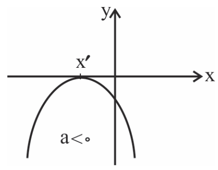
الف) سهمی محور طول‌ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند: در این حالت فرض کنید که x' و x'' صفرهای تابع باشند، لذا x' و x'' جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند و داریم:

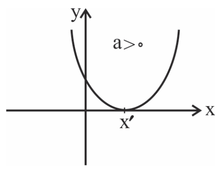




$$y=a(x-x')(x-x'')$$

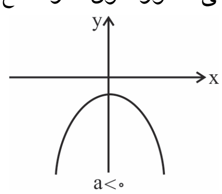
ب) سهمی محور طول‌ها را در یک نقطه قطع می‌کند: در این حالت x' صفر تابع است و معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشهٔ مضاعف است.

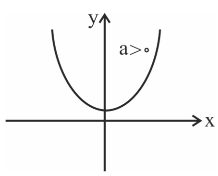




$$y=a(x-x')^2$$

ج) سهمی محور طول‌ها را قطع نمی‌کند: معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ریشه ندارد.



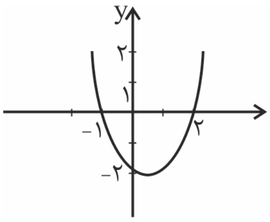


$$y=ax^2+bx+c$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): نمودار سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ داده شده است. ضابطهٔ آن را بنویسید.

☑ پاسخ:



به کمک نمودار واضح است که $x' = -۱$ و $x'' = ۲$ صفرهای تابع هستند لذا داریم:

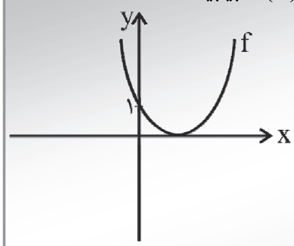
$$f(x) = a(x+۱)(x-۲)$$

نمودار تابع از $(۰,-۲)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند و داریم:

$$-۲ = a(۰+۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = (x+۱)(x-۲) \Rightarrow y = x^{۲} - x - ۲$$

تذکر: مسئلهٔ بالا را می‌توان با قرار دادن مختصات نقاط $(۲,۰)$، $(-۱,۰)$ و $(۰,-۲)$ در ضابطهٔ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ و حل دستگاه، نیز حل نمود.

مثال (۲): با توجه به نمودار مقابل مقدار m را در تابع $f(x) = x^{۲} + mx + c$ بیابید.



☑ پاسخ:

$f(۰) = ۱$ لذا $c + ۰ + ۰ = ۱$ و داریم: $\boxed{c = ۱}$

از طرفی منحنی بر محور طول‌ها مماس است یعنی معادلهٔ $x^{۲} + mx + ۱ = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد.

پس $\Delta = ۰$ و داریم:

$$\Delta = m^{۲} - ۴(۱)(۱) = ۰ \Rightarrow m^{۲} = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲$$

اما به کمک نمودار ملاحظه می‌شود که ریشهٔ مضاعف مثبت است و $a = ۱ > ۰$ پس $\frac{-b}{۲a} > ۰$ و از آنجا $\frac{-b}{۲(۱)} > ۰$ و

لذا داریم: $(\frac{-b}{۲} > ۰ \Rightarrow b < ۰)$ پس $m = -۲$ قابل قبول است.

مثال و پاسخ

مثال (۳): صفرهای تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۴}-۱۳x^{۲}+۳۶$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

معادلهٔ $f(x)=۰$ درجهٔ ۴ است. با تغییر متغیر آن را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌کنیم. فرض کنیم $x^{۲}=t$ سپس $t^{۲}-۱۳t+۳۶=۰$ که با تجزیه آن داریم:

$$(t-۹)(t-۴)=۰\Rightarrow t=۹, t=۴\Rightarrow\begin{cases}t=۹\Rightarrow x^{۲}=۹\Rightarrow x=\pm۳\\ t=۴\Rightarrow x^{۲}=۴\Rightarrow x=\pm۲\end{cases}$$

مثال (۴): اگر با ۱۰۰ متر نرده بخواهیم یک زمین مستطیل شکل را محصور کنیم، بیش‌ترین مساحت ممکن چه‌قدر است؟ **(نهایی خرداد ۹۰)**

پاسخ:

محیط مستطیل $P=۲(x+y)=۱۰۰\Rightarrow x+y=۵۰\Rightarrow y=۵۰-x$

مساحت مستطیل $S=xy=x(۵۰-x)=۵۰x-x^{۲}$

تابع مساحت مستطیل یک سهمی رو به پایین است و ماکزیمم آن برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است (با این مطالب در کتاب دهم آشنا شدید)

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴\times(-۱)\times۰-۵۰^{۲}}{۴(-۱)}=\frac{-۲۵۰۰}{-۴}=۶۲۵$$

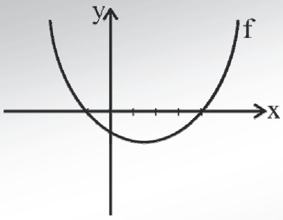
روش دیگری نیز برای محاسبهٔ ماکزیمم مساحت وجود دارد:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۵۰}{۲(-۱)}=۲۵\ ,\ \ y=۵۰-x=۲۵\Rightarrow f(۲۵)=۵۰(۲۵)-۲۵^{۲}=۶۲۵$$

نکتهٔ تستی: اگر مجموع دو کمیت عددی ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که آن دو کمیت با هم مساوی باشند.

مثال و پاسخ

مثال (۵): با توجه به شکل در مورد وجود و علامت ریشه‌های معادلـهٔ $f(x)=0$ و علامـت a، b و c بحـث کنید.



☑ **پاسخ:**

اولاً سهمی محور xها را در ۲ نقطه قطع کرده است.

لذا معادلهٔ $f(x)=0$ دارای ۲ ریشه است که یکی مثبت و یکی منفی است

و قدرمطلق ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر است.

هم‌چنین طول رأس سهمی مثبت است یعنی $\frac{-b}{2a}>0$

از طرفی سهمی روبه بالاست پس $a>0$ لذا مخرج کسر $\frac{-b}{2a}$ مثبت بوده و در نتیجه برای این‌که $\frac{-b}{2a}$ مثبـت شـود باید $-b>0$ و درنتیجه $b<0$

سهمی محور yها را در قسمت منفی قطع کرده است پس $c<0$

روش دوم: $S=\alpha+\beta$ و چون قدرمطلق ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است پـس $\alpha+\beta>0$، $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}>0$ و چـون $a>0$ پس $-b>0$ و لذا $b<0$ و $\underbrace{\alpha\beta}_{\text{یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی}}<0$ پس $\frac{c}{a}<0$ و چون $a>0$ پس $c<0$.

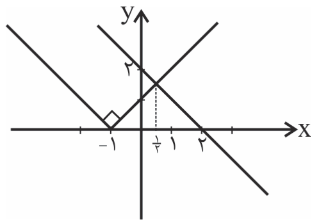
آموزش و تمرین

حل معادلات (روش هندسی)

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند، طول محل تلاقی نمودار این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

تمرین (۱): معادلهٔ $|x+۱|=-x+۲$ را به روش هندسی حل کنید.

☑ **پاسخ:**



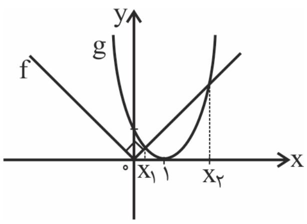
پس جواب معادلهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ است.

تمرین (۲): معادلهٔ $|x|-۱=x^{۲}-۲x$ چند جواب دارد؟

☑ **پاسخ:**

به نظر می‌رسد $f(x)=|x|-۱$ و $g(x)=x^{۲}-۲x$ را باید رسم کنیم، اما اگر عدد یک را به طرف دوم تساوی منتقل کنیم خواهیم داشت: $|x|=x^{۲}-۲x+۱$

و لذا $|x|=(x-۱)^{۲}$ که در این صورت $f(x)=|x|$ و $g(x)=(x-۱)^{۲}$ و رسم نمودارها به مراتب ساده‌تر از رسم نمودار تابع‌های اولیه هست.



معادله دارای ۲ جواب است.

$x_۱$ و $x_۲$ جواب‌ها هستند.

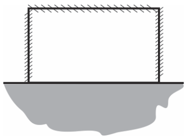
سؤالات تشریحی درس سوم

۱ــ محیط یک مستطیل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.

(نهایی خرداد ۹۳)

۲ــ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ - ۵x - ۵ = ۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش ۲α و ۲β باشد.

۳ــ اگر با ۱۲۰ متر نرده بخواهیم یک زمین مستطیل شکل کنار دریا را محصور کنیم، بیش‌ترین مساحت ممکن چه‌قدر است؟ (مطابق شکل)



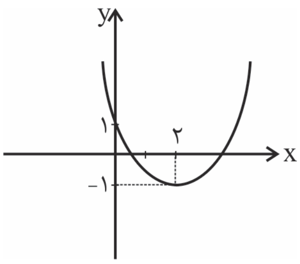
۴ــ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۱ \pm \sqrt{۵}$ باشد.

۵ــ کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۵$ را بیابید.

۶ــ شکل مقابل نمودار سهمی به معادلهٔ $p(x) = ax^۲ + bx + c$ است.

الف) ضرایب a، b و c را مشخص کنید.

ب) معادلهٔ $p(x) = ۰$ چند ریشه دارد؟ علامت ریشه‌ها را مشخص کنید.



۷ــ صفرهای تابع $p(x) = (x^۲ - ۱)^۴ + (x^۲ - ۱)^۲ - ۲$ را بیابید.

۸ــ معادلهٔ $(\frac{x^۲}{۳} - ۲)^۲ - ۱۱(\frac{x^۲}{۳} - ۲) + ۱۰ = ۰$ را حل کنید.

۹ــ معادلهٔ $|x| = ۱ - x^۲$ چند جواب دارد؟ (روش هندسی)

۱۰ــ معادلهٔ $\frac{x+۱}{x} = ۲x^۲$ $(x \neq ۰)$ چند جواب دارد؟ (روش هندسی)

۱۱ــ m را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ + mx + ۲$ برابر ۲ باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را بیابید.

۱۲ــ فرشی به ابعاد ۴×۳ متر داریم. می‌خواهیم فرش را در اتاقی مستطیل شکل به مساحت ۲۰ مترمربع پهن کنیم طوری که فاصلهٔ لبه‌های فرش تا دیوار در همه جا یکسان باشد. فاصلهٔ لبهٔ فرش تا دیوار را حساب کنید.

پاسخ سؤالات تشریحی درس سوم

۱ـ

$$۲(\underset{\text{طول}}{\underset{\downarrow}{x}}+\underset{\text{عرض}}{\underset{\downarrow}{y}})=۱۸\Rightarrow x+y=۹ \qquad , \qquad xy=۱۴$$

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰\Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x'=۲\Rightarrow y'=۷\\ x''=۷\Rightarrow y''=۲\end{cases}$$

۲ـ

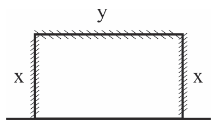
$$۴x^۲-۵x-۵=۰ \qquad S=\frac{-b}{a}=\frac{۵}{۴} \qquad , \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۴}$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید $S'=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲\times\frac{۵}{۴}=\frac{۵}{۲}$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید $P'=۲\alpha\times۲\beta=۴(\alpha\beta)=۴\times-\frac{۵}{۴}=-۵$

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x-۵=۰\Rightarrow ۲x^۲-۵x-۱۰=۰$$

۳ـ



$$۲x+y=۱۲۰\Rightarrow y=۱۲۰-۲x$$

$$S=x\times y=x(۱۲۰-۲x)=-۲x^۲+۱۲۰x$$

$$S_{Max}=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times-۲\times۰-(۱۲۰)^۲}{۴(-۲)}=\frac{-۱۴۴۰۰}{-۸}=۱۸۰۰$$

روش دوم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{۲(-۲)}=۳۰\Rightarrow f(۳۰)=-۲(۳۰)^۲+۱۲۰(۳۰)=-۲\times۹۰۰+۳۶۰۰=۱۸۰۰$$

۴ـ

$$x'=۱+\sqrt{۵} \qquad , \qquad x''=۱-\sqrt{۵}\Rightarrow S=x'+x''=۱+\sqrt{۵}+۱-\sqrt{۵}=۲$$

$$P=x'.x''=(۱-\sqrt{۵})(۱+\sqrt{۵})=۱^۲-(\sqrt{۵})^۲=۱-۵=-۴$$

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۴=۰$$

۵ـ

$$f(x)=۳x^{۲}-۱۲x+۵=۰\Rightarrow y_{Min}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{۴\times۳\times۵-(-۱۲)^{۲}}{۴(۳)}$$

$$=\frac{۶۰-۱۴۴}{۱۲}=\frac{-۸۴}{۱۲}=-۷$$

روش دوم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۱۲)}{۲\times۳}=۲\Rightarrow f(۲)=۳(۲)^{۲}-۱۲(۲)+۵\Rightarrow f(۲)=۱۲-۲۴+۵=-۷$$

۶ـ

به کمک نمودار اطلاعات لازم را کسب می‌کنیم:

$p(۰)=۱\ ,\ p(۲)=۱$

الف)

$$\frac{-b}{۲a}=۲$$

$$p(x)=ax^{۲}+bx+c$$

$$p(۰)=۱\Rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=۱\Rightarrow c=۱$$

$$p(۲)=-۱\Rightarrow a(۲)^{۲}+b(۲)+۱=-۱\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\Rightarrow ۲a+b=-۱$$

$$\frac{-b}{۲a}=۲\Rightarrow -b=۴a\Rightarrow ۴a+b=۰$$

$$-\begin{cases}۲a+b=-۱\\ ۴a+b=۰\end{cases}\Rightarrow ۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۲$$

ب) معادله دو ریشهٔ مثبت دارد زیرا سهمی محور x ها را در دو نقطه در سمت راست محور x ها قطع کرده است.

۷ـ

$$(x^{۲}-۱)^{۲}=t\Rightarrow t^{۲}+t-۲=۰\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}t=۱\ ,\ t=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

$$\xrightarrow{t=۱}(x^{۲}-۱)^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}-۱=\pm۱\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}-۱=۱\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^{۲}-۱=-۱\Rightarrow x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=-۲}(x^{۲}-۱)^{۲}=-۲\ \text{غیرممکن}$$

۸ـ

$$\frac{x^{۲}}{۳}-۲=t\Rightarrow t^{۲}-۱۱t+۱۰=۰\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}t=۱\ ,\ t=\frac{c}{a}=۱۰$$

$$\xrightarrow{t=۱} \frac{x^۲}{۳} - ۲ = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۳} = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

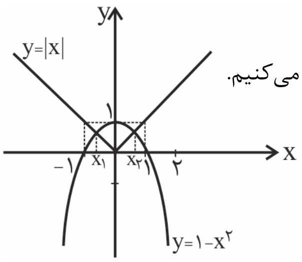
$$\xrightarrow{t=۱۰} \frac{x^۲}{۳} - ۲ = ۱۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{۳} = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۶$$

۹ـ

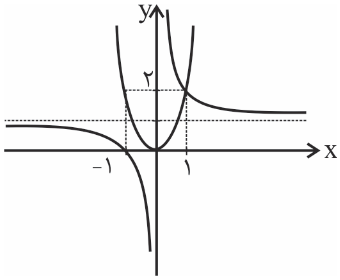
نمودارهای $y = |x|$ و $y = ۱ - x^۲$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم.

طول محل برخورد این دو نمودار جواب‌های معادله را مشخص می‌کند.

معادله دارای ۲ جواب است.



۱۰ـ



معادله یک جواب دارد.

$$y = \frac{x+۱}{x} = ۱ + \frac{۱}{x}$$

$(x \neq ۰)$

$y = ۲x^۲$

x	-۱	۰	۱
y	۲	۰	۲

۱۱ـ

نکته: ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند و صفر تابع را اگر در تابع قرار دهیم، مقدار تابع صفر می‌شود.

$f(۲) = ۰$

$f(۲) = ۲^۳ - ۲(۲)^۲ + m(۲) + ۲ = ۸ - ۸ + ۲m + ۲ = ۰ \Rightarrow m = -۱$

$\xrightarrow{m=-۱} x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = ۰$

برای تعیین سایر صفرهای تابع باید عبارت را تجزیه کنیم.

ملاحظه می‌کنید در این عبارت حاصل $۲ + (-۱) + (-۲) + ۱$ یعنی مجموع ضرایب صفر است.

پس عبارت بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است:

$x^۳ - ۲x^۲ - x + ۲ = (x - ۱)(\qquad\qquad)$

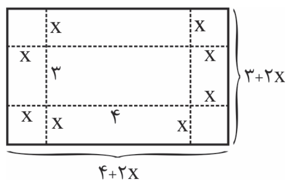
برای پیدا کردن عبارت داخل پرانتز خالی، تقسیم زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۲x^۲-x+۲ & x-۱ \\ \cline{2-2} -x^۳+x^۲ & x^۲-x-۲ \\ \cline{1-1} \quad -x^۲-x & \\ \quad +x^۲-x & \\ \cline{1-1} \qquad -۲x+۲ & \\ \qquad +۲x-۲ & \\ \cline{1-1} \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^۳-۲x^۲-x+۲=(x-۱)(x^۲-x-۲)=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)(x+۱)=۰$$

$$\text{تعیین صفرهای تابع}\begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

۱۲ـ



$x=?$ $\qquad$ مساحت اتاق $S=۲۰$ $\qquad$ ابعاد فرش ۳×۴

$$S=۲۰ \Rightarrow (۴+\underline{\underline{۲x}})(۳+\underline{\underline{۲x}})=۲۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۱۴x+۱۲=۲۰ \Rightarrow ۴x^۲+۱۴x-۸=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۷x-۴=۰ \qquad \Delta=۴۹-۴(۲)(-۴)=۴۹+۳۲=۸۱$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۷\pm۹}{۴}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{-۷-۹}{۴}=\frac{-۱۶}{۴}=-۴ \ \text{غ ق ق} \\ x=\frac{-۷+۹}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \ \text{ق ق} \end{cases}$$

آموزش و تمرین

کوچک‌ترین مضرب مشترک

در سال‌های پیش با روش پیدا کردن کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شده‌اید.
ابتدا هر یک از اعداد را به عوامل اول تجزیه کرده و سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با نمای بزرگ‌تر را محاسبه می‌کنیم.

تمرین (۱): کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۴۸ و ۱۲۰ را به‌دست آورید.

☑ **پاسخ:**

۲	۷۲
۲	۳۶
۲	۱۸
۳	۹
۳	۳
	۱

۲	۴۸
۲	۲۴
۲	۱۲
۲	۶
۳	۳
	۱

$۴۸ = ۲^{۴} \times ۳$

$\Rightarrow \quad ۷۲ = ۲^{۳} \times ۳^{۲}$

ک م م $= ۲^{۴} \times ۳^{۲} = ۱۶ \times ۹ = ۱۴۴$

تمرین (۲): کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات زیر را تعیین کنید.

$$A = ۲ax^{۲} + ۲bx^{۲}$$
$$B = ۷a^{۳} - ۷ab^{۲}$$
$$C = a^{۲} - ab - ۲b^{۲}$$

☑ **پاسخ:**

ابتدا هر یک از عبارات را تا حد امکان با ضرایب گویا تجزیه می‌کنیم:

$A = ۲x^{۲}(a+b)$ (فاکتورگیری)

$B = ۷a(a^{۲} - b^{۲}) = ۷a(a-b)(a+b)$ (اتحاد مزدوج)

$C = (a-۲b)(a+b)$ (اتحاد جملهٔ مشترک)

ک‌م‌م $= ۱۴ax^{۲}(a-b)(a+b)(a-۲b)$

مثال و پاسخ

مثال (۱): کوچک‌ترین مضرب مشترک سه عدد ۱۰۸، ۷۲ و ۱۵۰ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

هریک از اعداد را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم:

$$۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$$

$$۱۰۸ = ۲^۲ \times ۳^۳$$

$$۱۵۰ = ۲ \times ۳ \times ۵^۲$$

$$\text{ک‌م‌م} = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۲ = ۸ \times ۲۷ \times ۲۵ = ۵۴۰۰$$

مثال (۲): کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات زیر را تعیین کنید.

$$A = x^۲ - y^۲$$

$$B = x^۲ + xy$$

$$C = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

☑ **پاسخ:**

هریک از عبارات را تجزیه می‌کنیم:

$$A = (x - y)(x + y)$$

$$B = x(x + y)$$

$$C = (x + y)^۲$$

$$\text{ک‌م‌م} = x(x - y)(x + y)^۲$$

آموزش و تمرین

معادلهٔ شامل عبارات گویا و گنگ حل آن‌ها

در کتاب نهم با عبارات گویا آشنا شده‌اید. حال معادلات شامل عبارت گویا را بررسی و حل خواهیم کرد.

الف) برای حل معادلات شامل عبارت گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. توجه داشته باشید که جواب به‌دست آمده نباید هیچ‌یک از مخرج کسرهای اولیه را صفر کند.

ب) معادلاتی که دارای عبارت رادیکالی از مجهول هستند، **معادلات گنگ** می‌گوییم.

برای حل این معادلات، طرفین معادله را به توان فرجهٔ رادیکال می‌رسانیم تا به معادله‌ای بدون رادیکال برسیم و آن را حل می‌کنیم. توجه داشته باشید که جواب‌های به‌دست آمده باید در معادلهٔ اصلی جایگذاری شوند و مجموعه جواب تعیین شود.

تمرین (۱): معادلهٔ $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{۱}{x+۳}$ چند جواب دارد؟

☑ **پاسخ:** طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(x-۱)(x+۳)=x-۲$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲x-۳-x+۲=۰ \Rightarrow x^{۲}+x-۱=۰$$

$$\Delta=۱-۴(۱)(-۱)=۵ \qquad x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

تمرین (۲): اگر $x=۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{۵x-x^{۲}}$ باشد، جواب دیگر را بیابید. (سراسری)

☑ **پاسخ:** جواب معادله در معادله صدق می‌کند.

$$x=۴ \Rightarrow ۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶}=\sqrt{۴}=۲ \Rightarrow a=-۲$$

$$a=-۲ \Rightarrow x-۲=\sqrt{۵x-x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-۲)^{۲}=(\sqrt{۵x-x^{۲}})^{۲}$$

$$x^{۲}-۴x+۴=۵x-x^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲}-۹x+۴=۰$$

$$\Delta=۸۱-۴(۲)(۴)=۴۹ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۹\pm\sqrt{۴۹}}{۴}=\frac{۹\pm۷}{۴} \Rightarrow x=۴, x=\overset{\text{غ ق ق}}{\frac{۱}{۲}} \rightarrow$$ جواب دیگر وجود ندارد

مثال و پاسخ

مثال (۱): معادلهٔ $۲+\frac{۵}{۳x-۱}=\frac{-۲}{(۳x-۱)^۲}$ را حل کنید.

پاسخ:

می‌دانیم کوچک‌ترین مضرب مشترک بین $(۳x-۱)$ و $(۳x-۱)^۲$ برابر $(۳x-۱)^۲$ است. لذا طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم:

$$(۳x-۱)^۲(۲+\frac{۵}{۳x-۱}=\frac{-۲}{(۳x-۱)^۲})\Rightarrow ۲(۳x-۱)^۲+۵(۳x-۱)=-۲$$

با تغییر متغیر $t=(۳x-۱)$ داریم:

$$۲t^۲+۵t+۲=۰\Rightarrow (t+۲)(۲t+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۲\\ t=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x-۱=-۲\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\ \text{ق ق}\\ ۳x-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۶}\ \text{ق ق}\end{cases}\qquad \text{مجموعه جواب}=\left\{-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۶}\right\}$$

مثال (۲): مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\frac{x}{x-۳}+\frac{۳}{x-۱}=۵$ را بیابید.

پاسخ:

کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارات مخرج برابر $(x-۳)(x-۱)$ است. طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم. داریم:

$$x(x-۱)+۳(x-۳)=۵(x-۱)(x-۳)$$

$$\Rightarrow x^۲-x+۳x-۹=۵x^۲-۲۰x+۱۵\Rightarrow ۴x^۲-۲۲x+۲۴=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۱x+۱۲=۰\Rightarrow(۲x-۳)(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۲}\ \text{ق ق}\\ x=۴\ \text{ق ق}\end{cases}\qquad \text{مجموعه جواب}=\left\{\frac{۳}{۲},۴\right\}$$

مثال (۳): معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}=۱$ را حل کنید.

پاسخ:

یکی از عبارات گنگ را به طرف دوم منتقل می‌کنیم و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+۱}=۱-\sqrt{x}\Rightarrow(\sqrt{x+۱})^۲=(۱-\sqrt{x})^۲\Rightarrow x+۱=۱+x-۲\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow -۲\sqrt{x}=۰\Rightarrow(\sqrt{x})^۲=(۰)^۲\Rightarrow x=۰\ \text{ق ق}\qquad \text{مجموعه جواب}=\{۰\}$$

مثال و پاسخ

مثال (۴): معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x-1$ را حل کنید و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

پاسخ:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

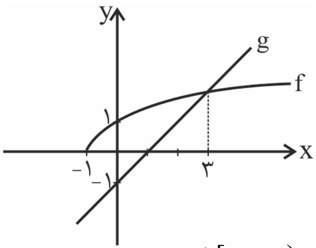
$x = 0$ غیرقابل قبول است زیرا اگر عدد صفر را به جای x در معادلهٔ اصلی قرار دهیم:

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} = 0-1 \Rightarrow 1 = -1$ غیرقابل قبول است. $x = 0$

این معادله را به روش هندسی نیز می‌توان حل کرد:

$f(x) = \sqrt{x+1}$

$g(x) = x-1$



($x = 3$ جواب معادله است.)

توجه کنید برای تعیین دامنه باید هم $x+1 \geq 0$ و هم $x-1 \geq 0$ باشد، لذا دامنه $[1, +\infty)$ است.

مثال (۵): معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$ را حل کنید.

پاسخ:

در این معادله توجه داشته باشید که مجموع دو مقدار نامنفی برابر صفر است. لذا باید هر دو مقدار برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 & \text{غ ق ق} \\ \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(معادله جواب ندارد.)

اگر بدون توجه به نامنفی بودن جملات، یکی از جملات را به طرف دوم منتقل و طرفین را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{x-1})^2 = (-\sqrt{x})^2$$

$\Rightarrow x-1 = x \Rightarrow -1 = 0$ غیرممکن $\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

سؤالات تشریحی درس چهارم

۱ـ معادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{۲-x^{۲}}=x$

ب) $\sqrt{۳+\sqrt{۱-۳x}}=۲$

پ) $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲x-۲}=۰$

ت) $\sqrt{۲x}+\sqrt{x+۱}=۰$

ث) $\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$ (نهایی خرداد)

ج) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱}=\frac{x+۲}{x}$

چ) $\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}+۳=\frac{-۴}{x-۲}$

۲ـ a را چنان بیابید که جواب معادلهٔ زیر برابر ۳ باشد.

$$\frac{۱}{x^{۲}-۱}+\frac{ax}{x^{۲}+۲x+۱}-\frac{۲}{x+۱}=۰$$

پاسخ سؤالات تشریحی درس چهارم

۱ـ

الف) $\sqrt{2-x^2}=x$

تعیین دامنه: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 2 \Rightarrow -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2} \end{cases}$ پس خواهیم داشت: $D=\left[0,\sqrt{2}\right]$

طرفین معادله را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم: $(\sqrt{2-x^2})^2=x^2$

$2-x^2=x^2 \Rightarrow 2=x^2+x^2 \Rightarrow 2=2x^2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

ب) $\sqrt{3+\sqrt{1-3x}}=2$

تعیین دامنه: $\begin{cases} 1-3x\ge 0 \Rightarrow x\le \frac{1}{3} \\ 3+\sqrt{1-3x}\ge 0 \\ 2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow D=(-\infty,\frac{1}{3}]$

طرفین به توان ۲: $(\sqrt{3+\sqrt{1-3x}})^2=2^2 \Rightarrow 3+\sqrt{1-3x}=4 \Rightarrow \sqrt{1+3x}=1$

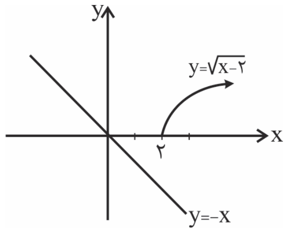
$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1+3x=1 \Rightarrow x=0$ قابل قبول

پ) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2x-2}$

تعیین دامنه: $\begin{cases} x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \\ x+\sqrt{x-2}\ge 0 \\ 2x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \end{cases}$

حل نامعادلهٔ دوم به روش هندسی

$\sqrt{x-2}\ge -x$



اجتماع دامنه‌ها $\rightarrow \{x\ge 2\}$

$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x+\sqrt{x-2}=2x-2 \Rightarrow \sqrt{x-2}=x-2$

$\Rightarrow x-2=(x-2)^2 \Rightarrow (x-2)-(x-2)^2=0$

$\Rightarrow (x-2)(1-(x-2))=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ 1-x+2=0 \Rightarrow x=3 & \text{ق ق} \end{cases}$

ت) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=0$

جمع دو مقدار نامنفی برابر صفر است پس هر کدام باید صفر باشند.

$D:\begin{cases} 2x\ge 0 \Rightarrow x\ge 0 \\ x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow D=[0,+\infty)$

$\sqrt{۲x}=۰\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰$ غیرقابل قبول $(۰+۱\neq ۰$ زیرا$)$

$\sqrt{x+۱}=۰\Rightarrow x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$ غیرقابل قبول (زیرا $\sqrt{-۲}$ تعریف نمی‌شود.)

مجموعهٔ جواب $=\varnothing$

ث) $\dfrac{x^۲-۲x+۲}{x(x-۲)}-\dfrac{(۱+x)(x-۲)}{x(x-۲)}=\dfrac{(x-۱)x}{(x-۲)x}$

$D=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

$\Rightarrow x^۲-۲x+۲-(x^۲-x-۲)=x^۲-x$

$\Rightarrow x^۲-۲x+۲-x^۲+x+۲=x^۲-x\Rightarrow -x+۴=x^۲-x$

$\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲\Rightarrow x=-۲$ قابل قبول

ج) $\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{x-۱}=\dfrac{x+۲}{x}$ $\qquad D=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$

$\Rightarrow \dfrac{۱}{x}-\dfrac{x+۲}{x}=\dfrac{-۱}{x-۱}\Rightarrow \dfrac{۱-x-۲}{x}=\dfrac{-۱}{x-۱}$

$\Rightarrow \dfrac{-۱-x}{x}=\dfrac{-۱}{x-۱}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}-(x^۲-۱)=-x\Rightarrow -x^۲+۱+x=۰$

$x^۲-x-۱=۰\qquad \Delta=۱+۴=۵\Rightarrow x=\dfrac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول

چ) $\dfrac{۱}{(x-۲)^۲}+\dfrac{۴(x-۲)}{(x-۲)(x-۲)}=-۳$ $\qquad D=\mathbb{R}-\{۲\}$

$\Rightarrow \dfrac{۱+۴x-۸}{(x-۲)^۲}=-۳\Rightarrow \dfrac{۴x-۷}{(x-۲)^۲}=-۳$

$\Rightarrow ۴x-۷=-۳(x^۲-۴x+۴)\Rightarrow -۳x^۲+۱۲x-۱۲-۴x+۷=۰$

$\Rightarrow -۳x^۲+۸x-۵=۰\qquad \Delta=۶۴-۴(-۳)(-۵)=۴\qquad x=\dfrac{-۸\pm۲}{-۶}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۵}{۳}\\ x=۱\end{cases}$

روش دوم: مجموع ضرایب صفر است. یک ریشهٔ $x=۱$ و ریشهٔ دیگر $x=\dfrac{c}{a}$ است که $\dfrac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود.

۲ـ $\dfrac{۱}{x^۲-۱}+\dfrac{ax}{\underbrace{x^۲+۲x+۱}_{(x+۱)^۲}}-\dfrac{۲}{x+۱}=۰$

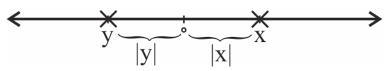
$x=۳\xrightarrow{\text{جایگذاری}}\dfrac{۱}{۹-۱}+\dfrac{۳a}{۱۶}-\dfrac{۲}{۴}=۰$

$\Rightarrow \dfrac{۱^{\times۲}}{۸_{\times۲}}+\dfrac{۳a}{۱۶}-\dfrac{۱^{\times۸}}{۲_{\times۸}}=۰\Rightarrow ۲+۳a-۸=۰\Rightarrow ۳a=۶\Rightarrow a=۲$

آموزش و تمرین

رسم نمودار تابع‌های قدرمطلقی

با مفهوم قدرمطلق و برخی خواص آن در سال گذشته آشنا شدید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق x یعنی فاصلهٔ هر عدد حقیقی x تا مبدأ که با نماد $|x|$ نمایش داده می‌شود.



به عنوان مثال $|۲|$ یعنی فاصلهٔ ۲ تا مبدأ که ۲ واحد است و می‌نویسیم: $|۲| = ۲$

یا $|-۲|$ یعنی فاصلهٔ (-۲) تا مبدأ که ۲ واحد است و می‌نویسیم: $|-۲| = ۲$

از آنجا که فاصله همواره عددی نامنفی است، لذا $|x| \geq ۰$

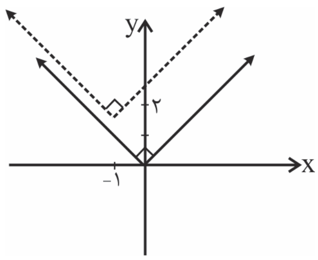
تذکر: $|x-y|$ را فاصلهٔ x تا y می‌نامیم.

به عنوان مثال فاصلهٔ x تا ۲ روی محور اعداد حقیقی را با نماد $|x-۲|$ نمایش می‌دهیم.

همچنین با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|$ و انتقال نمودار در سال گذشته آشنا شده‌اید.

به‌عنوان مثال برای رسم نمودار $f(x) = |x+۱| + ۲$ نمودار $f(x) = |x|$ را یک واحد به چپ و ۲ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

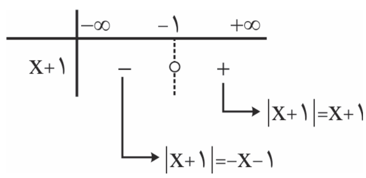


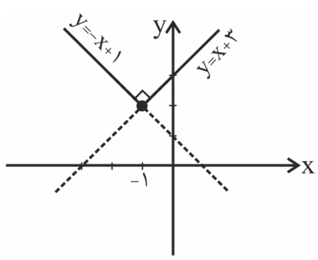
روش دوم رسم نمودار این تابع این است که با استفاده از تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل نموده و سپس با رسم نیم‌خط‌ها به‌دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم.

تمرین: تابع $f(x) = |x+۱| + ۲$ را رسم کنید.

☑ **پاسخ:**

$$f(x) = |x+۱| + ۲ = \begin{cases} x+۳ & x \geq -۱ \\ -x+۱ & x < -۱ \end{cases}$$





مثال و پاسخ

مثال (۱): هرگاه $1 < x < 2$ حاصل $|x-2|+|x-1|$ را بیابید.

پاسخ:

$$x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$$
$$x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$$
$$\Rightarrow |x-1|+|x-2| = x-1-x+2 = 1$$

مثال (۲): اگر $0 < x < 1$ حاصل عبارت $P = 3|x| + 2|x-1| - 5x$ را بیابید.

پاسخ:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -x+1$$
$$\Rightarrow P = 3x + 2(-x+1) - 5x = -4x+2$$

مثال (۳): اگر $-5 < x < 1$ حدود $|x+1|$ را بیابید.

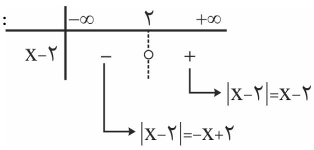
پاسخ:

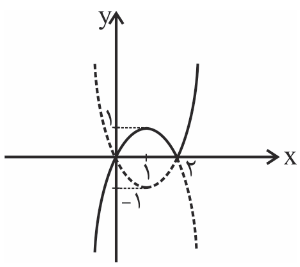
$$-5 < x < 1 \Rightarrow -5+1 < x+1 < 1+1 \Rightarrow -4 < x+1 < 2 < 4$$
$$\Rightarrow -4 < x+1 < 4 \Rightarrow |x+1| < 4$$

مثال (۴): تابع $y = x|x-2|$ را به‌صورت چند ضابطه‌ای بنویسید و آن را رسم کنید.

پاسخ:

تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق :





$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 & x < 2 \\ x^2 - 2x = \underbrace{x^2 - 2x + 1 - 1}_{\text{تبدیل به مربع کامل}} = (x-1)^2 - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

مثال (۵): تابع $f(x) = x^2|x|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

پاسخ:

$$f(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

آموزش و تمرین

خواص قدرمطلق

قدرمطلق خاصیت‌هایی دارد که از این خواص در حل معادلات و نامعادلات قدرمطلقی استفاده می‌کنیم.
برای هر $x \in \mathbb{R}$ خواص زیر برقرار است:

۱) $|x| \geq 0$

۲) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

۳) $|x| = |-x| \quad , \quad |x-y| = |y-x|$

۴) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

۵) $\sqrt{x^2} = |x|$

۶) $|xy| = |x|.|y|$

۷) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad y \neq 0$

۸) $-|x| \leq x \leq |x|$

۹) $|x| = k \xleftrightarrow{(k>0)} x = \pm k \quad , \quad |x| = |k| \Leftrightarrow x = \pm k$

۱۰) $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$

۱۱) $|x| > k \Leftrightarrow x > k$ یا $x < -k$

۱۲) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلث)

شرط تساوی زمانی برقرار است که x و y برابر صفر یا هم‌علامت باشند یعنی $xy \geq 0$

۱۳) $|x-y| \leq |x| + |y|$

۱۴) $|x-y| \geq |x| - |y|$

تمرین: خاصیت‌های شمارهٔ ۱۳ و ۱۴ را اثبات کنید.

☑ **پاسخ:**

$* \; |x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + \underbrace{|-y|}_{\swarrow}$

طبق خاصیت ۳ $\Rightarrow |x-y| \leq |x| + |y|$

$** \; |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow |x| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

مثال و پاسخ

مثال (۱): مینیم مقدار تابع $f(x)=|۲x-۱|+۲|x+۳|$ را بیابید.

☑ پاسخ:

$|۲x-۱|=|۱-۲x|$:طبق خاصیت ۳

از طرفی با توجه به خاصیت $|x|+|y|\geq|x+y|$ خواهیم داشت:

$$|۱-۲x|+|۲x+۶|\geq|۱-\cancel{۲x}+\cancel{۲x}+۶|$$

$$\Rightarrow|۱-۲x|+|۲x+۶|\geq ۷\Rightarrow f(x)\geq ۷$$

لذا مینیمم مقدار تابع برابر ۷ است.

مثال (۲): مینیمم مقدار تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۳|$ را بیابید.

☑ پاسخ:

می‌دانیم $|x-۳|=|۳-x|$

با توجه به نامساوی مثلث:

$$\underbrace{|x-۱|+|x-۳|}_{f(x)}=|x-۱|+|۳-x|\geq|\cancel{x}-۱+۳-\cancel{x}|=۲$$

$$\Rightarrow f(x)\geq ۲$$

لذا مینیمم تابع برابر ۲ است.

نکته: توجه داشته باشید که در توابعی که به‌صورت $f(x)=|ax+b|+|cx+d|$ هستند، می‌توانیم با استفاده از خاصیت‌های قدرمطلق، مینیمم مقدار تابع را پیدا کنیم.

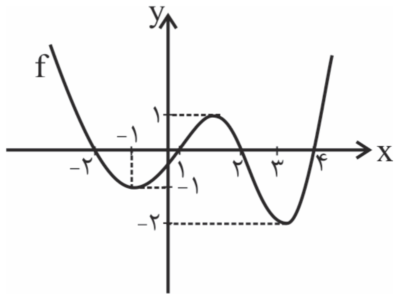
آموزش و تمرین

رسم نمودار $y=|f(x)|$

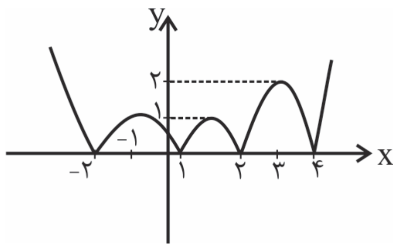
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم نموده سپس قسمتی از نمودار که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

$$y=f(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \rightarrow \text{بالای محور x ها} \\ -f(x) & f(x)<۰ \rightarrow \text{زیر محور x ها} \end{cases}$$

به‌عنوان مثال اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد:



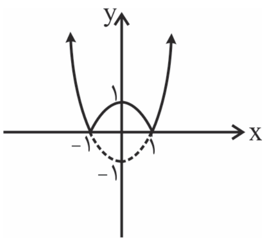
نمودار $y=|f(x)|$ به‌صورت زیر خواهد بود:



مثال و پاسخ

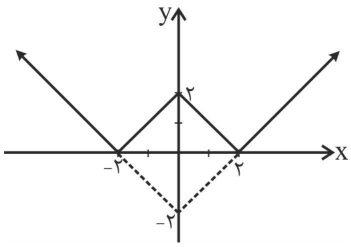
مثال (۱): نمودار $y=\left|x^{۲}-۱\right|$ را رسم کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{۲}-۱$ را رسم می‌کنیم.



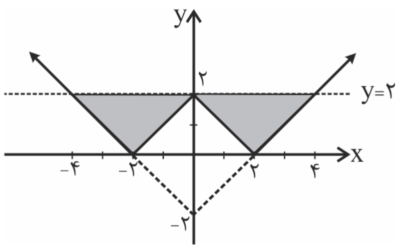
مثال (۲): نمودار $y=\left|\left|x\right|-۲\right|$ را رسم کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\left|x\right|-۲$ را رسم می‌کنیم.



مثال (۳): مساحت محدود بین منحنی $y=\left|\left|x\right|-۲\right|$ و خط $y=۲$ را بیابید.

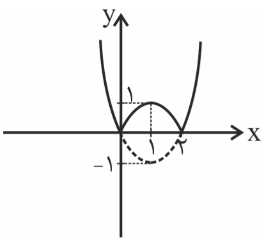
☑ **پاسخ:**



$$S=\frac{۴\times۲}{۲}+\frac{۴\times۲}{۲}=۸$$

مثال (۴): نمودار $y=\left|x^{۲}-۲x\right|$ را رسم کنید.

☑ **پاسخ:** ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^{۲}-۲x$ را رسم می‌کنیم.

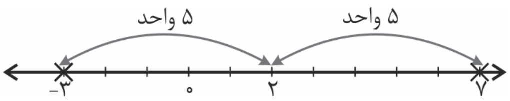


$$y=x^{۲}-۲x+۱-۱=(x-۱)^{۲}-۱$$

آموزش و تمرین

حل معادلات قدرمطلق

حال می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که **چند نقطه روی محور اعداد حقیقی می‌توان یافت که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت ۲ برابر ۵ باشد؟**



ملاحظه می‌کنید که دو نقطهٔ با طول ۷ و ۳− جواب‌های مسئله هستند.

اگر بخواهیم مسئله بالا را مدلسازی ریاضی کرده و با کمک خواص قدرمطلق حل کنیم خواهیم داشت:

طبق خاصیت (۹)

$$\underbrace{|x-۲|}_{\text{فاصلهٔ } x \text{ تا } ۲} = ۵ \Rightarrow x-۲=\pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۵ \Rightarrow x=۲+۵=۷ \\ x-۲=-۵ \Rightarrow x=-۵+۲=-۳ \end{cases}$$

به این‌گونه معادلات، معادلات قدرمطلقی گفته می‌شود و برای حل آن‌ها از خواص گفته شده استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که برای حل معادلات قدرمطلقی به‌صورت $|f(x)|=g(x)$ می‌توانیم روش هندسی نیز به‌کار ببریم:

در این روش توابع دو طرف معادله در یک کاغذ شطرنجی رسم می‌کنیم:

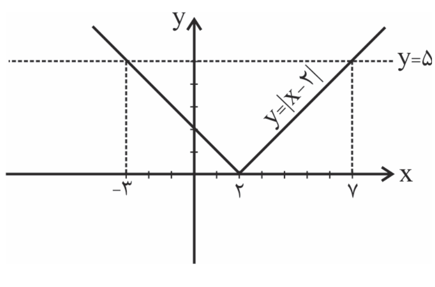
$$\begin{cases} y=|f(x)| \\ y=g(x) \end{cases}$$

سپس محل برخورد این دو نمودار را به‌طور دقیق مشخص می‌کنیم و طول نقاط برخورد را مشخص می‌کنیم که همان جواب‌های معادله است.

تمرین: معادلهٔ $|x-۲|=۵$ را به‌روش هندسی حل کنید.

☑ **پاسخ:**

$$\begin{cases} y=|x-۲| \\ y=۵ \end{cases}$$



مثال و پاسخ

مثال (۱): معادلهٔ $|x+۱| = ۰/۲۵$ را حل کنید.

پاسخ:

طبق خاصیت (۹)
$$\begin{cases} x+۱ = ۰/۲۵ \\ x+۱ = -۰/۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱+۰/۲۵ = -۰/۷۵ \\ x = -۱-۰/۲۵ = -۱/۲۵ \end{cases}$$

مثال (۲): معادلهٔ $|۲x-۳| = ۰$ چند جواب دارد؟

پاسخ:

طبق خاصیت (۲)
$$|۲x-۳| = ۰ \Rightarrow ۲x-۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

مثال (۳): معادلهٔ $\left|x^۲-\pi^۲\right| = \pi^۲ - x^۲$ را حل کنید.

پاسخ: با توجه به این‌که جواب قدرمطلق، قرینهٔ عبارت داخل قدرمطلق است لذا:

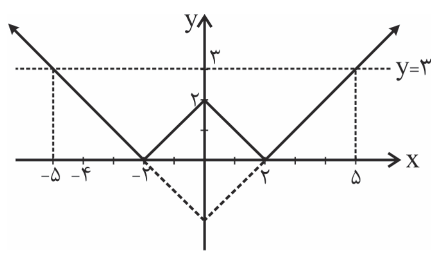
$$x^۲-\pi^۲ \le ۰ \Rightarrow x^۲ \le \pi^۲ \xrightarrow{\text{خاصیت۱۰}} -\pi \le x \le \pi$$

مثال (۴): معادلهٔ $\big||x|-۲\big| = ۳$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

پاسخ: روش جبری: طبق خاصیت (۹)
$$|x|-۲ = \pm ۳$$

$$\begin{cases} |x|-۲ = ۳ \Rightarrow |x| = ۵ \xrightarrow{\text{خاصیت۹}} x = \pm ۵ \\ |x|-۲ = -۳ \Rightarrow |x| = -۱ \ \text{غیرممکن} \end{cases}$$

روش هندسی:
$$\begin{cases} y = \big||x|-۲\big| \\ y = ۳ \end{cases}$$



معادله ۲ جواب دارد: $x = -۵$ و $x = ۵$

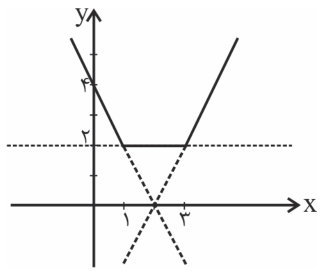
مثال و پاسخ

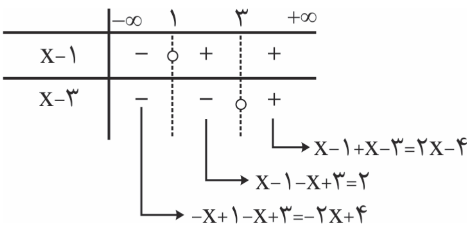
مثال (۶): الف) تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۳|$ را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل کنید.
ب) نمودار تابع را رسم کنید و به کمک نمودار مینیمم مقدار تابع را تعیین کنید.
ج) معادلهٔ $|x-۱|+|x-۳|=۵$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

پاسخ:

الف)
$$f(x)=|\underset{\substack{\downarrow\\ x-۱=۰\\ x=۱}}{x-۱}|+|\underset{\substack{\downarrow\\ x-۳=۰\\ x=۳}}{x-۳}|=\begin{cases}-۲x+۴ & x<۱\\ ۲ & ۱\le x\le ۳\\ ۲x-۴ & x>۳\end{cases}$$

ب)





مینیمم مقدار تابع برابر ۲ است.

ج) حل جبری:

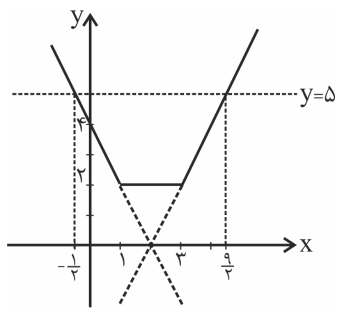
اگر $x<۱ \Rightarrow -۲x+۴=۵ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$ ق ق

اگر $۱\le x<۳ \Rightarrow ۲=۵$ غیرممکن

اگر $x>۳ \Rightarrow ۲x-۴=۵ \Rightarrow x=\frac{۹}{۲}$ ق ق

حل هندسی: محل برخورد نمودار دو تابع زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=|x-۱|+|x-۳|\\ y=۵\end{cases}$$



سؤالات تشریحی درس پنجم

۱ـ عبارت «فاصلهٔ x و ۲ کم‌تر از ۰/۰۱ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

۲ـ معادلهٔ $|x-۲|=x$ را به روش جبری و هندسی حل کنید.

۳ـ مساحت محدود بین منحنی $y=|x|-۱$ و محور xها را بیابید.

۴ـ نمودار تابع $y=\left|۱-x^۲\right|$ را بدون تبدیل به تابع چندضابطه‌ای رسم کنید.

۵ـ معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

الف) $|۲x-۱|=۱-۲x$

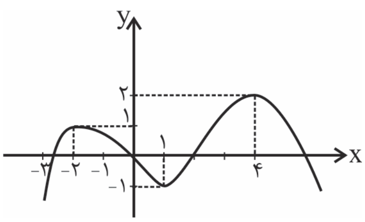
ب) $||x|-۱|=۳$ (هندسی)

ج) $\left|a^۲-۲\right|-۷=۰$ (خواص قدرمطلق)

۶ـ تعداد جواب‌های معادلهٔ $x+\frac{x}{|x|}=۳$ را به روش هندسی بیابید.

۷ـ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\left|x^۲-۲\right|=۲x-|x|$ را به روش هندسی بیابید.

۸ـ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار $|f|$ را رسم کنید.



۹ـ تابع $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ را به‌صورت چند ضابطه‌ای بنویسید.

۱۰ـ معادلهٔ $|x+۲|+|x-۱|=۳$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

پاسخ سؤالات تشریحی درس پنجم

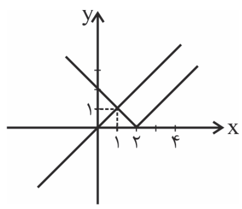
۱ـ

$|x-۲|<۰/۰۱$

۲ـ

روش هندسی:

$\begin{cases} y=|x-۲| \\ y=x \end{cases}$

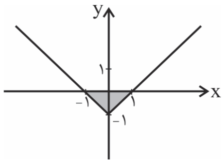


معادله دارای یک جواب $x=۱$ است.

روش جبری: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$(x-۲)^۲ = x^۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۴=x^۲ \Rightarrow -۴x=-۴ \Rightarrow x=۱$

۳ـ

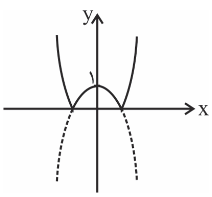


$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱ = ۱$

۴ـ

ابتدا نمودار $y=۱-x^۲$ را رسم می‌کنیم.

$y=|۱-x^۲|$



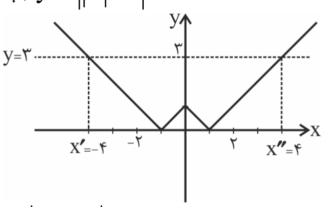
۵ـ

روش دلخواه

الف) $|۲x-۱|=۱-۲x \Rightarrow ۲x-۱\le ۰ \Rightarrow ۲x\le ۱ \Rightarrow x\le \frac{۱}{۲}$

روش هندسی

ب) $y=||x|-۱|=۳$



ج) $|a^۲-۲|=۷$

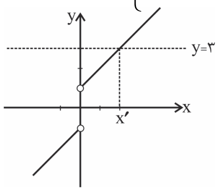
$a^۲-۲=\pm ۷ \Rightarrow \begin{cases} a^۲-۲=-۷ \Rightarrow a^۲=-۵ \quad \text{غیرممکن} \\ a^۲-۲=۷ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm ۳ \end{cases}$

۶ـ

روش هندسی
$$\begin{cases} y=۳ \\ y=x+\dfrac{x}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x+۱ & x>۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۲ \end{array} \\ x-۱ & x<۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱ \\ \hline y & -۱ & -۲ \end{array} \end{cases} \end{cases}$$

$۰ \notin D$

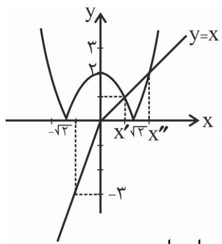
توجه کنید شیب هر دو نیم‌خط مساوی است و موازی رسم شده است.



معادله دارای یک جواب است. $x=۲$

۷ـ

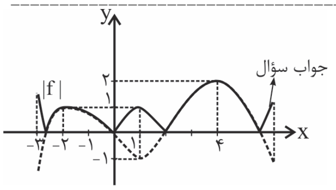
$$\begin{cases} y=\left|x^{۲}-۲\right| \\ y=۲x-|x|=\begin{cases} x & x\ge ۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array} \\ ۳x & x<۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱ \\ \hline y & ۰ & -۳ \end{array} \end{cases} \end{cases}$$



معادله دارای ۲ جواب است.

۸ـ

قرینهٔ قسمتی از نمودار را که زیر محور x هاست نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.



۹ـ

	$-\infty$ تا -۲	-۲ تا ۱	۱ تا $+\infty$
$x+۲$	−	+	+
$x-۱$	−	−	+
y	هر دو عبارت منفی	اولی مثبت دومی منفی	هر دو عبارت مثبت

$\to x+۲+x-۱=۲x+۱$

$\to x+۲-x+۱=۳$

$\to -x-۲-x+۱=-۲x-۱$

$$y=\underbrace{|x+۲|}_{\text{تعیین علامت}}+\underbrace{|x-۱|}_{\text{تعیین علامت}}=\begin{cases} -۲x-۱ & x<-۲ \\ ۳ & -۲\le x\le ۱ \\ ۲x+۱ & x>۱ \end{cases}$$

۱۰ـ

$|x+۲|+|x-۱|=۳$

روش جبری: با توجه به سؤال ۹ داریم:

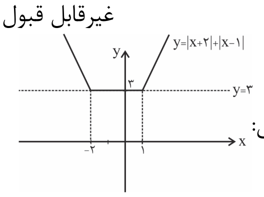
$$|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases} -۲x-۱ & x<-۲ \\ ۳ & -۲\le x\le ۱ \\ ۲x+۱ & x>۱ \end{cases}$$

اگر $x<-۲ \Rightarrow -۲x-۱=۳ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x=-۲ \notin x<-۲$ غیرقابل قبول

اگر $-۲\le x\le -۱ \Rightarrow ۳=۳ \Rightarrow [-۲,-۱]$ مجموعهٔ جواب

اگر $x>۱ \Rightarrow ۲x+۱=۳ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱ \notin x>۱$ غیرقابل قبول

روش هندسی:



$\Rightarrow$ مجموعهٔ جواب $=[-۲,۱]$

آموزش و تمرین

مختصات

با دستگاه مختصات در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید.

۱) محاسبهٔ طول پاره‌خط یا فاصلهٔ دو نقطه:

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، فاصلهٔ نقطهٔ A با نقطهٔ B یا طول پاره‌خط AB از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

اگر $x_A = x_B$ باشد آن‌گاه $AB = |y_B - y_A|$

و اگر $y_A = y_B$ باشد آن‌گاه $AB = |x_B - x_A|$

هم‌چنین اگر فاصلهٔ $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ را بخواهیم مشخص کنیم:

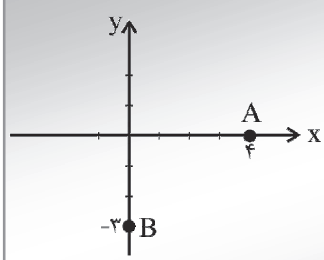
$$OA = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲}$$

۲) مختصات وسط پاره‌خط AB:

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، در این صورت مختصات M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

تمرین: فاصلهٔ نقطهٔ $M(-۱,۲)$ از وسط AB را بیابید.



☑ **پاسخ:**

$A(۴,۰)$ و $B(۰,-۳)$

مختصات نقطهٔ وسط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$N(\frac{۰+۴}{۲}, \frac{۰-۳}{۲}) \Rightarrow N(۲, -\frac{۳}{۲})$$

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^۲ + (y_M - y_N)^۲} = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۲+\frac{۳}{۲})^۲} = \sqrt{۹ + \frac{۴۹}{۴}} = \frac{\sqrt{۸۵}}{۲}$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): دو نقطهٔ $A(۳,-۵)$ و $B(۵,-۳)$ مفروضند. فاصلهٔ مبدأ مختصات از وسط AB را بیابید.

پاسخ:

ابتدا مختصات M وسط AB را تعیین می‌کنیم:

$$M(\frac{۵+۳}{۲},\frac{(-۳)+(-۵)}{۲}) \Rightarrow M(۴,-۴)$$

$$OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

مثال (۲): نقاط $A(۲,-۳)$، $B(۰,۵)$ و $C(-۱,۲)$ مختصات رئوس یک مثلث هستند. طول اضلاع مثلث را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}$$

$$AC=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۳-۲)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

مثال (۳): نقطهٔ A روی خط $y=x-۲$ قرار دارد و از دو نقطهٔ $B(-۲,۳)$ و $C(-۳,۲)$ به یک فاصله است. طول نقطهٔ A را بیابید.

پاسخ:

طول نقطهٔ A را α می‌نامیم لذا عرض آن $\alpha-۲$ است. $A(\alpha,\alpha-۲)$

طبق مفروضات سؤال، فاصلهٔ A از B و C یکسان است یعنی $AB=AC$

مکان هندسی نقطهٔ A روی عمودمنصف BC است.

$$\Rightarrow \overbrace{\sqrt{(\alpha+۲)^۲+(\alpha-۲-۳)^۲}}^{AB}=\overbrace{\sqrt{(\alpha+۳)^۲+(\alpha-۲-۲)^۲}}^{AC}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow (\alpha+۲)^۲+(\alpha-۵)^۲=(\alpha+۳)^۲+(\alpha-۴)^۲$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^۲}+۴\alpha+۴+\cancel{\alpha^۲}-۱۰\alpha+۲۵=\cancel{\alpha^۲}+۶\alpha+۹+\cancel{\alpha^۲}-۸\alpha+۱۶$$

$$\Rightarrow ۴\alpha-۱۰\alpha-۶\alpha+۸\alpha=۹+۱۶-۴-۲۵$$

$$\Rightarrow -۴\alpha=-۴ \Rightarrow \alpha=۱$$

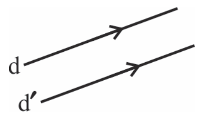
آموزش و تمرین

وضعیت دو خط نسبت به هم

خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ را در نظر بگیرید:

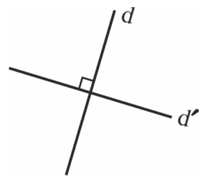
الف) اگر شیب این خطوط با هم مساوی باشد، دو خط موازیند.

$$m=\frac{-a}{b}\ ,\quad m'=\frac{-a'}{b'}\xrightarrow{m=m'}\underbrace{\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\ \text{یا}\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}}_{\text{شرط توازی دو خط}}$$

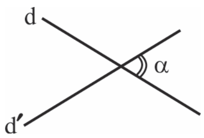


ب) اگر شیب این دو خط قرینه و معکوس هم باشند، دو خط بر هم عمودند.

$$\frac{-a}{b}=\frac{b'}{a'}\xrightarrow{m=\frac{-1}{m'}}\underbrace{bb'+aa'=0}_{\text{شرط عمود بودن دو خط}}$$



نکته برای تعیین زاویهٔ بین دو خط می‌توانیم شیب خطوط را محاسبه کرده و با کمک فرمول $\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$ زاویهٔ α را مشخص کنیم.



تمرین: وضعیت دو خط $y=2x+1$ و $x+2y+1=0$ را بدون رسم آن‌ها تعیین کنید.

☑ **پاسخ:**

شیب خطوط را محاسبه می‌کنیم:

$$y=2x+1\Rightarrow m=2$$

$$x+2y+1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\Rightarrow m'=-\frac{1}{2}$$

$mm'=2\times(-\frac{1}{2})=-1\Rightarrow$ دو خط بر هم عمودند.

مثال و پاسخ

مثال (۱): a را طوری تعیین کنید که دو خط $y = ۲x - ۱$ و $y = (a-۱)x - ۲a + ۱$:

الف) موازی باشند.

ب) عمود باشند.

پاسخ:

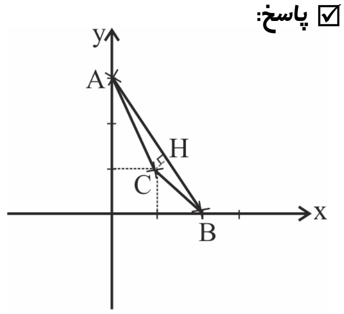
$$m = ۲ \quad , \quad m' = a - ۱$$

الف) $a - ۱ = ۲ \Rightarrow a = ۳$

ب) $a - ۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

مثال (۲): نقاط $A(۰,۳)$، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند. معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید.

پاسخ:



$$m_{AB} = \frac{۳ - ۰}{۰ - ۲} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_{CH} = \frac{۲}{۳}$$

$$y = ax + b \xrightarrow{m = \frac{۲}{۳}} y = \frac{۲}{۳}x + b$$

$$\xrightarrow{C(۱,۱)} ۱ = \frac{۲}{۳}(۱) + b \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{y = \frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}}$$

مثال (۳): معادلهٔ خطی بنویسید که از نقطهٔ $(۱,۲)$ موازی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم رسم می‌شود. این خط محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

پاسخ:

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y = -x$ و لذا $m = -۱$

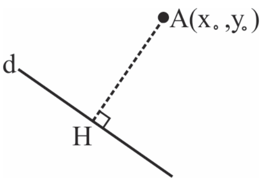
$$m' = m = -۱ \quad , \quad A(۱,۲)$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{A(۱,۲)} ۲ = -۱ + b \Rightarrow b = ۳$$

معادلهٔ خط $\Rightarrow y = -x + ۳ \xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد با محور طول‌ها}} ۰ = -x + ۳ \Rightarrow x = ۳$

آموزش و تمرین

فاصلهٔ نقطه از خط



فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط d به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ از فرمول $AH=\dfrac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ محاسبه می‌شود که AH طول عمودی است که از A بر خط d رسم می‌شود.

حالت خاص: فاصلهٔ $O(\circ,\circ)$ از خط d به معادلهٔ $ax+by+c=\circ$ از فرمول $AO=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ محاسبه می‌شود.

تذکر: برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو خط موازی از فرمول $d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ استفاده می‌کنیم.

تمرین (۱): فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲)$ از خط $۲x-۳y+۱=\circ$ را بیابید.

☑ **پاسخ:**

$a=۲ \quad b=-۳ \quad c=۱ \quad x_\circ=۱ \quad y_\circ=۲$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(-۱)-۳(۲)+۱|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۷}{\sqrt{۱۳}}$$

تمرین (۲): فاصلهٔ دو خط زیر را بیابید.

$d: ۲x-y+۳=\circ$

$d': ۴x-۲y+۱=\circ$

☑ **پاسخ:**

$m_d=۲ \qquad m_{d'}=-۲ \Rightarrow$ دو خط موازیند

برای استفاده از فرمول تذکر بالا، باید ضرایب x و y در دو معادله یکسان باشد، لذا طرفین معادلهٔ دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} d: ۲x-y+۳=\circ \quad c=۳ \;,\; c'=\frac{۱}{۲} \;,\; a=۲ \;,\; b=-۱ \\ d': ۲x-y+\frac{۱}{۲}=\circ \quad d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\dfrac{\left|۳-\frac{۱}{۲}\right|}{\sqrt{۴+۱}}=\dfrac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۵}}=\dfrac{۵}{۲\sqrt{۵}} \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال (۱): روی خط d به معادلهٔ $y-۲x=۳$ نقطه‌ای بیابید که از خط $x+۲y-۱=۰$ به فاصلهٔ $\sqrt{۵}$ باشد.

☑ **پاسخ:**

نقطه‌ای دلخواه روی خط $y-۲x=۳$ فرض می‌کنیم: $A(\alpha,۲\alpha+۳)$

$$AH=\frac{|\alpha(۱)+(۲\alpha+۳)(۲)-۱|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=\sqrt{۵}\Rightarrow\frac{|\alpha+۴\alpha+۶-۱|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow|۵\alpha+۵|=\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=۵\Rightarrow۵|\alpha+۱|=۵$$

$$\Rightarrow|\alpha+۱|=۱\Rightarrow\begin{cases}\alpha+۱=۱\Rightarrow\alpha=۰\Rightarrow A(۰,۳)\\ \alpha+۱=-۱\Rightarrow\alpha=-۲\Rightarrow A(-۲,-۱)\end{cases}$$

مثال (۲): نقاط $A(۰,۳)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند، طول ارتفاع CH را بیابید.

☑ **پاسخ:**

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۳}{۲-۰}=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+b$$

$$\xrightarrow{A(۰,۳)}۳=-\frac{۳}{۲}\times۰+b\Rightarrow b=۳\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+۳$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر در ۲}}۲y+۳x-۳=۰\quad(\text{معادلهٔ } AB)$$

$$a=۳\qquad b=۲\qquad c=-۳$$

$$CH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times۱+۲\times۱-۳|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

مثال (۳): معادلهٔ قطر مربعی $۴y-۳x=۰$ و مختصات یک رأس آن $A(۱,۲)$ است. مساحت مربع را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:**

$$a=-۳\quad,\quad b=۴$$

$$\text{نصف قطر مربع } AH=\frac{|-۳(۱)+۴(۲)|}{\sqrt{(-۳)^۲+۴^۲}}=\frac{|+۵|}{۵}=۱\Rightarrow AC=۲\text{ قطر مربع}$$

$$S_{\text{مربع}}=\frac{۲\times۲}{۲}=۲$$

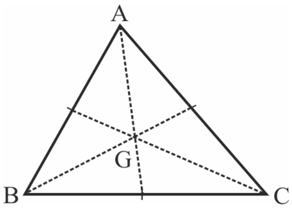
تذکر: برای پیدا کردن مساحت مربعی که قطر آن معلوم است می‌توان از فرمول مساحت لوزی استفاده کرد.

آموزش و تمرین

مرکز ثقل مثلث و روابط بین رئوس متوازی‌الاضلاع

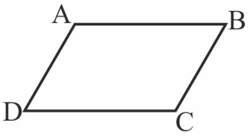
۱) می‌دانید میانه خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل فرود آمده و آن را نصف می‌کند. محل برخورد سه میانهٔ مثلث را مرکز ثقل مثلث می‌نامیم.

مختصات G مرکز ثقل مثلث از فرمول زیر محاسبه می‌گردد.



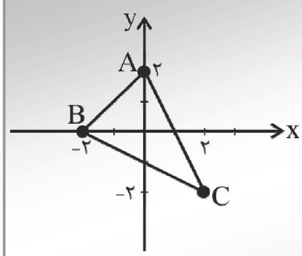
$$G(\frac{x_A + x_B + x_C}{۳}, \frac{y_A + y_B + y_C}{۳})$$

۲) اگر A ، B ، C و D رئوس متوالی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، روابط زیر بین مختصات این رئوس برقرار است.



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تمرین: مختصات مرکز ثقل مثلث را در شکل زیر بیابید.



☑ **پاسخ:**

$$A(۰,۲)\ ,\ B(-۲,۰)\ ,\ C(۲,-۲)$$

$$G(\frac{۰+(-۲)+۲}{۳}, \frac{۲+۰+(-۲)}{۳}) \Rightarrow G(۰,۰)$$

مثال و پاسخ

مثال(۱): نقاط $A(۲,-۳)$، $B(۰,۵)$ و $C(-۱,۲)$ رئوس یک مثلث هستند. مختصات مرکز ثقل مثلث را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:**

$$G\left(\frac{-۱+۰+۲}{۳},\frac{۲+۵+(-۳)}{۲}\right)\Rightarrow G\left(\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۳}\right)$$

مثال (۲): اگر $A(۵,۸)$، $B(۵,۳)$ و $C(۴,۶)$ سه رأس متوالی یک متوازی‌الاضلاع باشند، مختصات رأس D را بیابید.

☑ **پاسخ:**

طبق روابط گفته شده داریم:

$$\begin{cases} ۵+۴=۵+x_D \\ ۸+۶=۳+y_D \end{cases}\Rightarrow D(۴,۱۱)$$

مثال (۳): نقاط $A(۱,۲)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۳,۴)$ مفروضند. فاصلهٔ مبدأ مختصات از مرکز ثقل مثلث را تعیین کنید.

☑ **پاسخ:**

مختصات مرکز ثقل $G\left(\frac{۳+(-۱)+۱}{۳},\frac{۴+۳+۲}{۳}\right)\Rightarrow G(۱,۳)$

$$OG=\sqrt{۱^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۰}$$

آموزش و تمرین

بیش‌تر بدانیم

برای تعیین مساحت مثلث وقتی مختصات سه رأس آن معلوم است. از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

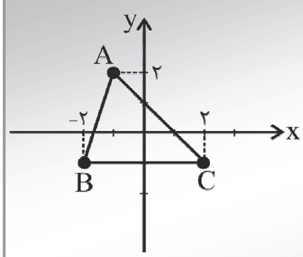
$$S=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

به‌عنوان مثال مساحت مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(-۱,۲)$، $B(۳,۴)$ و $C(-۳,-۱)$ باشد برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(-۱)(۴+۱)+۳(-۱-۲)+(-۳)(۲-۴)\right|$$

$$=\frac{۱}{۲}\left|-۵\cancel{-۹}\cancel{+۶}\right|=۴$$

تمرین: مساحت مثلث ABC را در شکل بیابید.



☑ **پاسخ:**

مختصات نقاط را تعیین می‌کنیم.

$$A(-۱,۲)\quad,\quad B(-۲,-۱)\quad,\quad C(۲,-۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(-۱)(-۱+۱)+(-۲)(-۱-۲)+(۲)(۲+۱)\right|$$

$$=\frac{۱}{۲۲}\left|۰+۶+۶\right|=\frac{۱}{۲}\times ۱۲=۶$$

سؤالات تشریحی درس ششم

۱ــ نقاط $A(2\sin\alpha, 2\cos\alpha - 2)$ ، $B(-1, \cos\alpha)$ و $C(1+\sin\alpha, 2)$ رئوس مثلث ABC باشند، فاصلهٔ مبدأ مختصات از مرکز ثقل مثلث را بیابید.

۲ــ نقطه‌ای روی خط $y = x + 1$ بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(5,1)$ برابر ۵ باشد.

۳ــ نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ دوم مشخص کنید که فاصلهٔ آن از خط $3y + x + 18 = 0$ برابر ۴ باشد.

۴ــ معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطهٔ $A(3,-1)$ و $B(-1,7)$ به یک فاصله باشد.

۵ــ زاویهٔ بین دو خط $x - 3y = 5$ و $y = 2x$ را بیابید.

۶ــ اگر $A(m,3)$ ، $B(1,n+1)$ و $C(2,0)$ رئوس یک مثلث و $G(5,0)$ مرکز ثقل مثلث باشد، m و n را بیابید.

۷ــ اگر $A(2-a,a)$ ، $B(a-1,a+1)$ ، $C(b+2,5-4b)$ و $D(2a+1,b-1)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مقدار $a-b$ را بیابید.

۸ــ دو نقطهٔ $A(3,4)$ و $B(-1,2)$ مفروضند. فاصلهٔ وسط AB از مبدأ را تعیین کنید.

پاسخ سؤالات تشریحی درس ششم

۱ـ

$$G\left|\begin{array}{l}\dfrac{۲\sin\alpha-۱+۱+\sin\alpha}{۳}=\sin\alpha\\ \dfrac{۲\cos\alpha-۲+\cos\alpha+۲}{۳}=\dfrac{۳\cos\alpha}{۳}=\cos\alpha\end{array}\right.$$

$$OG=\sqrt{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱}=۱$$

۲ـ

$$M\left|\begin{array}{l}x\\ x+۱\end{array}\right. \qquad A\left|\begin{array}{l}۵\\ -۱\end{array}\right. \qquad MA=۵$$

$$MA=\sqrt{(x-۵)^{۲}+(x+۱+۱)^{۲}}=\sqrt{(x-۵)^{۲}+(x+۲)^{۲}}=۵$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(x-۵)^{۲}+(x+۲)^{۲}=۲۵\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۲۹=۲۵$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۶x+۴=۰\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}x=۱\ ,\quad x=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$B(۱,۲)\ ,\ B'(۲,۳)$$

۳ـ

$$\text{نقطهٔ مورد نظر}\ A\left|\begin{array}{l}x\to x_{\circ}\\ -x\to y_{\circ}\end{array}\right.$$

$$d=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=۴ \qquad , \qquad (a=۴,b=۳,c=۱۸)$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۴x-۳x+۱۸|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{|x+۱۸|}{۵}=۴$$

$$\Rightarrow |x+۱۸|=۲۰\Rightarrow\begin{cases}x+۱۸=۲۰\Rightarrow x=۲\\ x+۱۸=-۲۰\Rightarrow x=-۳۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A'(-۳۸,۳۸)\\ A(۲,-۲)\end{cases}$$

۴ـ

$$M\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \quad , \quad \begin{array}{l}A(۳,-۱)\\ B(-۱,۷)\end{array} \qquad MA=MB\Rightarrow\sqrt{(x-۳)^{۲}+(y+۱)^{۲}}=\sqrt{(x+۱)^{۲}+(y-۷)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=(x+۱)^۲+(y-۷)^۲$$

پس از به توان‌رسانی و ساده کردن داریم:

$$۸x-۱۶y+۴۰=۰$$

$$۲x-۴y+۱۰=۰ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

۵ـ

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=\left|\frac{\frac{۱}{۳}-۲}{۱+۲(\frac{۱}{۳})}\right|=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=۱\Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

$$m=\frac{-a}{b}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$
$$m'=۲$$

۶ـ

$$G\left|\begin{array}{l}\frac{m+۱+۲}{۳}=۵\Rightarrow m+۳=۱۵\Rightarrow m=۱۲\\ \frac{۳+n+۱+۰}{۳}=۰\Rightarrow n+۴=۰\Rightarrow n=-۴\end{array}\right.$$

۷ـ

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(۲-a)+(b+۲)=(a-۱)+(۲a+۱)\\ a+(۵-۴b)=(a+۱)+(b-۱)\end{cases}$$

$$\begin{cases}۴a-b=۴\xrightarrow{b=۱}۴a-۱=۴\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}\\ ۵b=۵\Rightarrow b=۱\end{cases}\qquad \Rightarrow a-b=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}$$

$$AB\ \text{وسط}\ M\left|\begin{array}{l}\frac{۳-۱}{۲}=۱\\ \frac{۴+۲}{۲}=۳\end{array}\right.\qquad OM=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

تست‌های فصل اول

۱ـ در یک دنبالهٔ حسابی $2a_1 + a_2 - 3a_4 = 10$، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

۲ـ در بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جملهٔ اول کدام است؟ **(برگرفته از تمرین کتاب درسی)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

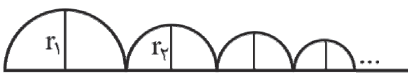
۳ـ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد: $(1),(3,5),(7,9,11),\ldots$، مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌ام کدام است؟ **(سراسری)**

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۴ـ در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۳ می‌باشد، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ **(سراسری)**

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۲/۴

۵ـ موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیهٔ یک واحد هر بار که با محور برخورد کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود، اندازهٔ محیط این نیم‌دایره‌های متوالی، دنبالهٔ اعداد حقیقی است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟ **(سراسری)**



۱) 2π ۲) 3π ۳) $\frac{3}{2}\pi$ ۴) $\frac{5}{2}\pi$

۶ـ اگر رابطهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 12$ بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 12x - 2 = 0$ برقرار باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{2}$ ۲) $\pm\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ـ تفاضل دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2 - 3x + m = 0$ برابر $\frac{5}{2}$ است. m کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۸ـ معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $۴y = x^۲ - ۴x - ۸$ است. مختصات رأس سهمی کدام است؟

۱) $(۰,-۳)$ ۲) $(۲,-۱)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(۲,-۳)$

۹ـ به‌ازای کدام مقدار m معادلهٔ $(m+۱)x^۲ + m(m^۲-۹)x - ۲ = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی قرینه دارد؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۳ ۴) ۹

۱۰ـ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ **(سراسری خارج)**

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۱۱ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴ - |x|$ در بازهٔ (a,b) بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y + x = ۵$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟ **(سراسری خارج)**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲ـ نقطهٔ $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ **(سراسری)**

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۱۳ـ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y - x = ۵$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۴ـ نقاط $A(۰,۳)$، $B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند، طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$

۱۵ـ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

پاسخ تشریحی تست‌های فصل اول

☑ **۱ـ گزینهٔ «۲»**

$$2a_1+(a_1+d)-3(a_1+3d)=10\Rightarrow -8d=10\Rightarrow d=-\frac{5}{4}$$

☑ **۲ـ گزینهٔ «۱»**

$$\begin{cases}\overbrace{a_1+a_3+\dots+a_{19}}^{\text{مجموع جملات ردیف فرد}}=135\\ \underbrace{a_2+a_4+\dots+a_{20}}_{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}=150\end{cases}\xrightarrow[n=10]{\text{قدرنسبت } 2d}\begin{cases}S=\frac{10}{2}(2\overset{\text{جملهٔ اول}}{a_1}+9(2d))=135\\ S=\frac{10}{2}(2\underset{\text{جملهٔ اول}}{a_2}+9(2d))=150\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a_1+18d=27\\ 2\underset{a_1+d}{a_2}+18d=30\end{cases}\Rightarrow -\begin{cases}2a_1+18d=27\\ 2a_1+20d=30\end{cases}\Rightarrow 2d=3\Rightarrow d=1/5\ ,\ a_1=0$$

☑ **۳ـ گزینهٔ «۳»**

	تعداد کل جملات
دستهٔ اول $(1)\rightarrow$ یک جمله	۱
دستهٔ دوم $(3,5)\rightarrow$ ۲ جمله	$1+2=3$
دستهٔ سوم $(7,9,11)\rightarrow$ ۳ جمله	$1+2+3=6$
$\vdots$	
دستهٔ ۲۹ $(\qquad)\rightarrow$ ۲۹ جمله	

تعداد کل جملات تا دستهٔ ۲۹ام $=\frac{29\times 30}{2}=435$

لذا اولین جملهٔ دستهٔ سی‌ام، ۴۳۶اُمین عدد فرد است. یعنی $a_n=2n-1$ پس:

جملهٔ اول دستهٔ ۳۰ام $\leftarrow 2(436)-1=871$ و جملهٔ سی‌اُم این دسته برابر است با:

$$a_1+29d=871+29\times 2=929$$

پس:

$$871+929=1800$$

☑ **۴ـ گزینهٔ «۳»**

$$\begin{cases}a_1+a_3=1\\ S_4=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_1q^2=1\\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+q^2)=1\\ \frac{a_1(1-q)(1+q)(1+q^2)}{1-q}=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+q^2)=1\\ a_1(1+q)(1+q^2)=3\end{cases}\xrightarrow{a_1(1+q^2)=1}1+q=3\Rightarrow q=2$$

$$a_1(1+q^2)=1\xrightarrow{q=2}a_1=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{1-2}=\frac{63}{5}=12/6$$

☑ ۵ـ گزینهٔ «۴»

$r_1=1\div 2=\frac{1}{2}$ شعاع اولیه $\Rightarrow$ محیط نیم‌دایرهٔ اولیه $=\frac{1}{2}(2\pi\times\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$

$r_2=\frac{1}{2}-\frac{20}{100}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\Rightarrow$ محیط نیم‌دایرهٔ دوم $=\frac{1}{2}(2\pi\times\frac{2}{5})=\frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{5},\dots$ دنبالهٔ محیط‌ها

$$S=\frac{\pi}{2}\overset{\times\frac{4}{5}}{\curvearrowright}+\frac{2\pi}{5}+\dots \qquad a=\frac{\pi}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{5\pi}{2}$$

☑ ۶ـ گزینهٔ «۱»

$$S=\frac{-b}{a}=2k \qquad , \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(2k)^2-2(-2)=4k^2+4=12\Rightarrow k^2=2\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$$

☑ ۷ـ گزینهٔ «۱»

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{9-8m}}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow 9-8m=25\Rightarrow m=-2$$

☑ ۸ـ گزینهٔ «۴»

$$4y=(x-2)^2-4-8\Rightarrow y=\frac{1}{4}(x-2)^2-3\Rightarrow S(2,-3)$$

☑ ۹ـ گزینهٔ «۳»

برای آن‌که معادله دارای ۲ ریشهٔ حقیقی قرینه باشد، بایستی $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}=0$ یعنی $b=0$

$$b=0\Rightarrow m(m^2-9)=0\Rightarrow m=0\ ,\ m=\pm 3$$

اگر $m=-3\Rightarrow\Delta=m^2(m^2-9)^2-4(m+1)(-2)=-16<0$

لذا $m=-3$ غ ق ق

برای $m=0$ و $m=3$ داریم $\Delta>0$ و قابل قبول هستند اما تنها $m=3$ در گزینه‌ها است.

☑ ۱۰ـ گزینهٔ «۳»

فرض کنید x، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد ابتدا مقدار رنگ خالص را حساب می‌کنیم.

وزن رنگ خالص $=11\times\%40+4\times\%70=7/2\,kg$

بنابراین در ۱۵ کیلوگرم رنگ موجود، ۷/۲ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد. اگر x میزان تبخیر باشد، داریم:

$$\frac{7/2}{15-x}=\%50\Rightarrow 720=750-50x\Rightarrow x=0/6$$

☑ **۱۱ـ گزینهٔ «۲»**

$$۲y+x=۵\Rightarrow y=\frac{۵-x}{۲}$$

حالت اول: $x\geq ۰$ لذا $|x|=x$ و $۴-|x|=۴-x$ درنتیجه داریم

حالت دوم: $x<۰$ لذا $|x|=-x$ و $۴-|x|=۴+x$ درنتیجه داریم

$$\begin{cases} ۴-x>\frac{۵-x}{۲} \\ ۴+x>\frac{۵-x}{۲} \end{cases}$$

از حل نامعادلات بالا داریم: $-۱<x<۰\ ,\ ۰\leq x<۳$

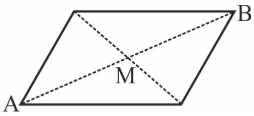
لذا مجموعه جواب نامعادله برابر است با: $(-۱,۰)\cup[۰,۳)=(-۱,۳)$

و بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر است با $۴=(-۱)-۳$ و گزینهٔ ۲ صحیح است.

☑ **۱۲ـ گزینهٔ «۳»**

مختصات A در هیچ‌کدام از معادلات داده شده صدق نمی‌کند بنابراین A روبه‌روی این دو خط است. فرض کنیم دو خط بالا یکدیگر را در B قطع کنند.

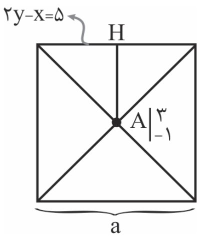
$$\begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases}\Rightarrow x=-۱\ ,\ y=۴\qquad B(-۱,۴)$$



$$M(\overset{\frac{-۱+۷}{۲}}{۳}\ ,\ \underset{\frac{۴+۶}{۲}}{۵})$$ وسط AB

☑ **۱۳ـ گزینهٔ «۴»**

فاصلهٔ وسط قطر مربع از هر ضلع آن برابر نصف طول ضلع مربع است.



$$AH=\frac{a}{۲}=\frac{|-۲-۳-۵|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}\Rightarrow S=a^۲=\frac{۴۰۰}{۵}=۸۰$$

☑ **۱۴ـ گزینهٔ «۱»**

معادلهٔ AB: $y-۰=\frac{۳-۰}{۰-۲}(x-۲)\Rightarrow ۲y+۳x-۶=۰$

فاصلهٔ C از AB: $CH=\frac{|۲(۱)+۳(۱)-۶|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$

☑ **۱۵ـ گزینهٔ «۳»**

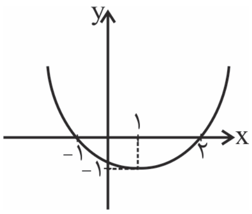
برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو خط موازی، معادلهٔ آن‌ها را طوری می‌نویسیم کـه ضـرایب x و y در هـر دو معادلـه یکسان باشند. $۲x-۲y-۳=۰$

$$y-x-۱=۰\xrightarrow{\times(-۲)}-۲y+۲x+۲=۰$$

$$\begin{cases} ۲x-۲y-۳=۰ \\ ۲x-۲y+۳=۰ \end{cases}\xrightarrow[\text{خط موازی}]{\text{فاصلهٔ دو}}\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}\Rightarrow S=(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

آزمون

نوبت اول

ردیف	سؤالات	بارم
۱	مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۵ را بیابید.	۱
۲	جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = ۲(\frac{۱}{۳})^n$ است. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله را بیابید.	۱
۳	معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۱ \pm \sqrt{۳}$ باشد.	۱
۴	سهمی $y = \frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶)$ را رسم کنید. صفرهای تابع را مشخص کنید.	۱/۵
۵	در شکل مقابل علامت و تعداد ریشه‌ها و علامت ضرایب را در معادلهٔ $f(x) = ۰$ مشخص کنید. 	۱
۶	معادلهٔ $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱۶ = ۰$ را حل کنید.	۱
۷	اگر $x = ۴$ جواب معادلهٔ $\frac{ax-a}{x^۲-۴} = \frac{۲}{x} + \frac{۳}{x+۲}$ باشد، a را بیابید.	۱/۵

آزمون

نوبت دوم

بارم	سؤالات	ردیف
۱/۲۵	در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.	۱
۱/۲۵	به روش هندسی معادلهٔ $\|x\| = x^{۲} - ۲x$ را حل کنید.	۲
۱	معادلهٔ $\sqrt{x^{۲} - ۲x + ۱} = ۲x + ۱$ را به روش جبری حل کنید.	۳
۱/۵	اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x - ۴y = ۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟	۴
۱	تابعی رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند و ضابطهٔ آن را بنویسید. الف) $f(۲) = ۳$ ب) دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ باشد. ج) در بازهٔ $[۲,+\infty)$ ثابت باشد. د) برای اعداد کوچک‌تر از ۲، به‌صورت $\sqrt{ax + b}$ باشد.	۵
۱/۵	نشان دهید تابع $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۳$ یک‌به‌یک نیست. سپس دامنهٔ تابع را چنان محدود کنید که تابعی یک‌به‌یک شود و ضابطهٔ تابع وارون آن را بیابید.	۶
۱/۵	اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = x^{۲} + ۱۲$ دامنه و ضابطهٔ fog را به‌دست آورید.	۷

پاسخ تشریحی

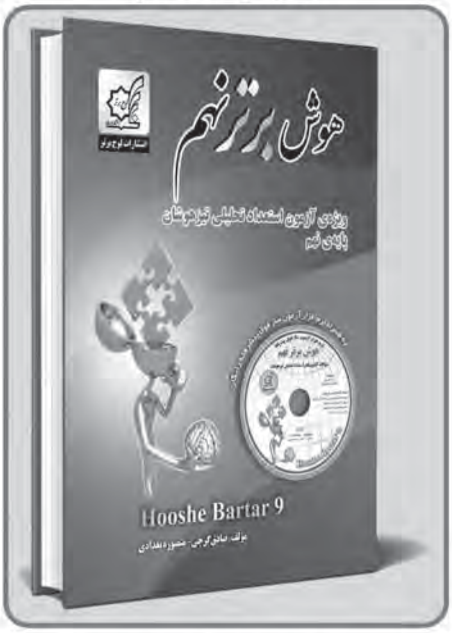
آزمون نوبت اول و دوم

اسمارت نهم

آموزش ریاضی تیزهوشان و نمونه‌دولتی نهم

با نرم‌افزار آزمون‌ساز رایگان

هوش برتر نهم



سؤالات استعداد تحلیلی آزمون تیزهوشان نهم

با نرم‌افزار آزمون‌ساز رایگان

فست بوک ریاضی نهم

آموزش سریع، آسان و کامل ریاضی

اتاق فرمان نهم

انتخاب رشتهٔ آگاهانه و موفق در پایهٔ نهم

برای آشنایی بیش‌تر و دریافت بخشی از متن کتاب‌ها QRcode مقابل را اسکن کنید.